Prüfung 2017 (Haupttermin)
– Teil 3 –

2.1 $A(-2\,|\,-1{,}5)$ $\quad g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
$B(2\,|\,0{,}5)$

Bestätigung durch Punktprobe

A:

$-1{,}5 = \frac{1}{2}\cdot(-2) - \frac{1}{2}$	$0{,}5 = \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{2}$
$-1{,}5 = -1 - \frac{1}{2}$	$0{,}5 = 1 - \frac{1}{2}$
$-1{,}5 = -1{,}5$ ✓	$0{,}5 = 0{,}5$ ✓

$\Rightarrow$ Die Gerade von $g(x)$ verläuft durch A und B

2.2

$A(-2\,|\,-1{,}5)$
$B(1\,|\,-1{,}5)$
$C(2\,|\,0{,}5)$

$$\boxed{f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}$$

$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

„Bauplan"

$f(-2) = -1{,}5$	$a_3\cdot(-2)^3 + a_2\cdot(-2)^2 + a_1\cdot(-2) + a_0 = -1{,}5$
$f(1) = -1{,}5$	$a_3\cdot 1^3 + a_2\cdot 1^2 + a_1\cdot 1 + a_0 = -1{,}5$
$f(2) = 0{,}5$	$a_3\cdot 2^3 + a_2\cdot 2^2 + a_1\cdot 2 + a_0 = 0{,}5$
$f'(-2) = \frac{1}{2}$	$3a_3\cdot(-2)^2 + 2\cdot a_2\cdot(-2) + a_1 = \frac{1}{2}$

$$\left|\begin{array}{l} -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0 = -1{,}5 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -1{,}5 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 0{,}5 \\ 12a_3 - 4a_2 + 1a_1 + 0 = 0{,}5 \end{array}\right|$$

2.2.2

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{11}{6}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$$

$$f''(x) = x + \frac{2}{3}$$

notw. Bed.: $\boxed{f'(x) = 0}$

$$0 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \quad \Big| :\frac{1}{2}$$

$$0 = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$x_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}}$$

$$x_1 \approx 0{,}22$$

$$x_2 \approx -1{,}55$$

hinr. Bed.: $\boxed{f''(x) \neq 0}$

$$f''(0{,}22) = 0{,}22 + \frac{2}{3}$$

$$f''(0{,}22) \approx 0{,}89 \quad \Rightarrow \underline{TP}$$

$$f''(-1{,}55) = -1{,}55 + \frac{2}{3}$$

$$f''(-1{,}55) \approx -0{,}88 \quad \Rightarrow \underline{HP}$$

f(x) – Werte:

$$f(0{,}22) = \frac{1}{6}\cdot 0{,}22^3 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}22^2 - \frac{1}{6}\cdot 0{,}22 - \frac{11}{6}$$

$$f(0{,}22) \approx -1{,}85$$

$$\Rightarrow TP(0{,}22 \mid -1{,}85)$$

$$f(-1{,}55) = \frac{1}{6}\cdot(-1{,}55)^3 + \frac{1}{3}\cdot(-1{,}55)^2 - \frac{1}{6}\cdot(-1{,}55) - \frac{11}{6}$$

$$f(-1{,}55) \approx -1{,}4$$

$$\Rightarrow HP(-1{,}55 \mid -1{,}4)$$

2.2.3 TP $(0{,}22 \mid -1{,}85)$ (siehe 2.2.2)

Naturschutzgebietsgrenze bei $y = -2$

Abstand: $d = |-2 - (-1{,}85)| = |-0{,}15| = 0{,}15$

$\hat{=} \underline{\underline{150\,m}}$

Entscheidung: Da $150\,m > 130\,m$, ist das Naturschutzgebiet weit genug weg.

2.2.4 gesucht ist der Wendepunkt

$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{11}{6}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$

$f''(x) = x + \frac{2}{3}$

$f'''(x) = 1$

- notw. Bed.: $\boxed{f''(x) = 0}$

$0 = x + \frac{2}{3} \quad \left| -\frac{2}{3}\right.$

$\underline{\underline{-\frac{2}{3} = x}}$

- hinr. Bed.: $\boxed{f'''(x) \neq 0}$

$f'''(-\frac{2}{3}) = 1 \Rightarrow WP_{R-L}$

- f(x) - Wert

$f(-\frac{2}{3}) = \frac{1}{6}\cdot(-\frac{2}{3})^3 + \frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})^2 - \frac{1}{6}(-\frac{2}{3}) - \frac{11}{6}$

$f(-\frac{2}{3}) = -\frac{263}{162} \approx \underline{\underline{-1{,}6}}$

$\underline{\underline{WP_{R-L}(-\frac{2}{3} \mid -\frac{263}{162})}}$

2.2.5: $C(2 \mid 0{,}5)$

$g'(x) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = 0{,}5x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$

$g'(2) = \frac{1}{2}$

$f'(2) = 0{,}5 \cdot 2^2 + \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{6}$

$f'(2) = \frac{19}{6}$

da $\frac{1}{2} \neq \frac{19}{6}$
gilt auch $g'(2) \neq f'(2)$

⇒ damit: Die Steigungen der Kurven von $f(x)$ und $g(x)$ weisen im Punkt C **keine** identische Steigung auf.

2.3.1 (siehe Graph ganz am Ende

2.3.2

$h(x) = \frac{5}{72}x^3 - \frac{5}{48}x^2 - \frac{115}{144}x + \frac{11}{12}$

Bestätigung, dass $x_1 = -3$ und $x_2 = 4$ zu einem Schnitt- ODER Berührpunkt gehören:

$g(-3) = -2$ ✓
$h(-3) = -2$

$g(4) = 1{,}5$ ✓
$h(4) = 1{,}5$

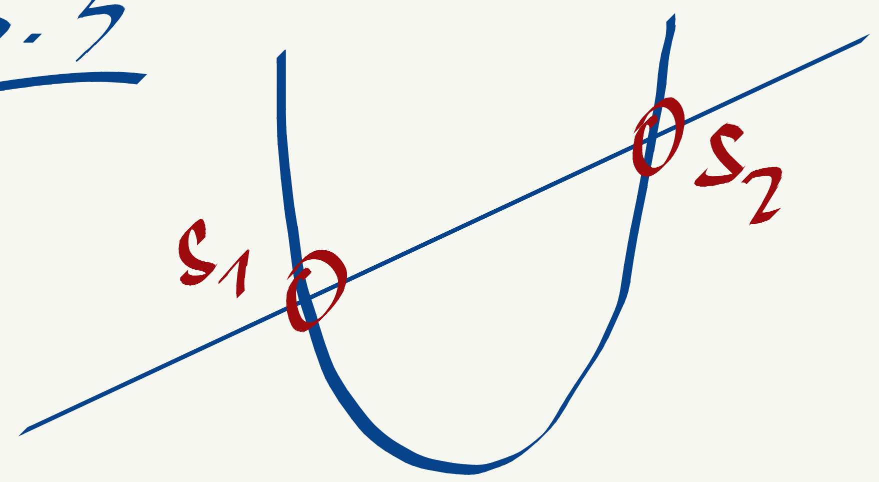
Bestätigung, dass x_1 und x_2 zu Berührpunkten gehören

$g'(-3) = 0{,}5$ ✓
$h'(-3) = 0{,}5$

$g'(4) = 0{,}5$ ✓
$h'(4) = 0{,}5$

⇒ x_1 und x_2 sind beides x-Werte von Berührpunkten.

2.3.3



Vorteile einer Parabelform:

- Einfachere Planung durch geringeren Funktionsgrad
  (im Grunde ein sehr schlechtes Argument!)

Nachteile einer Parabelform:

- Es wird durch den geringen Funktionsgrad (wenige Extrema und damit nur wenige Krümmungsrichtungsänderungen) unmöglich, an den beiden Übergangspunkten S_1 und S_2 einen Übergang ohne Knick (steigungsgleicher Übergang) zu schaffen.
  $\Rightarrow$ Das wäre seeeehr schlecht für den Verkehrsfluss.

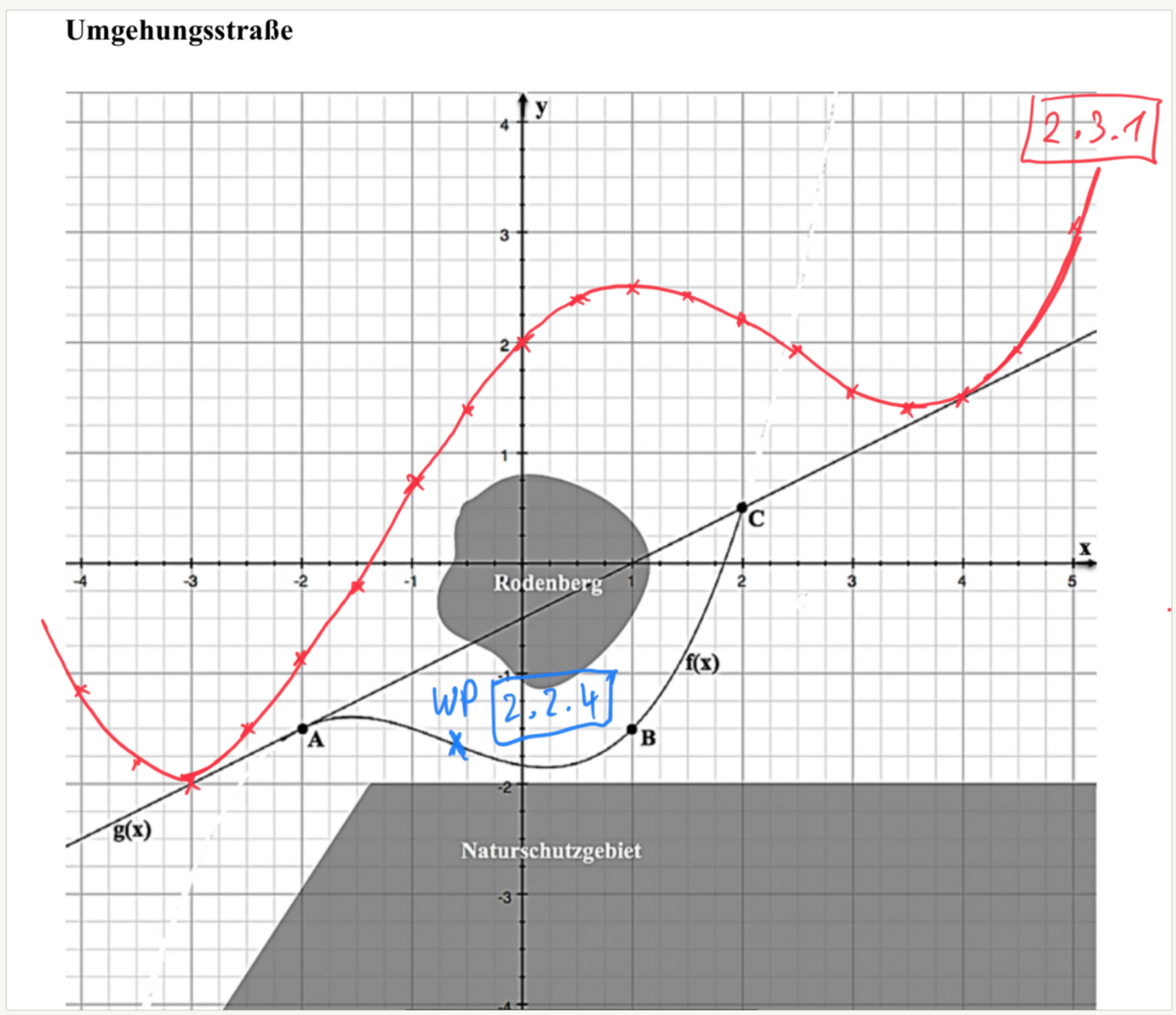
Funktionsgraph

Teillösung für

2.2.4

&

2.3.1



Rekonstruktion:

6 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat einen Extrempunkt $E(-2/0)$ und einen Wendepunkt $W(-1/-2)$.

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$
$$f''(x) = 6a_3x + 2a_2$$

"Bauplan"

1) $f(-2) = 0$
2) $f'(-2) = 0$
3) $f(-1) = -2$
4) $f''(-1) = 0$

$$\left| \begin{array}{l} a_3\cdot(-2)^3 + a_2\cdot(-2)^2 + a_1\cdot(-2) + a_0 = 0 \\ 3a_3\cdot(-2)^2 + 2a_2\cdot(-2) + a_1 = 0 \\ a_3\cdot(-1)^3 + a_2\cdot(-1)^2 + a_1\cdot(-1) + a_0 = -2 \\ 6a_3\cdot(-1) + 2a_2 = 0 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0 = 0 \\ 12a_3 - 4a_2 + a_1 + 0 = 0 \\ -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = -2 \\ -6a_3 + 2a_2 + 0 + 0 = 0 \end{array} \right|$$

mit dem WTR: $\underset{a_3}{x = 1}$ $\underset{a_2}{y = 3}$ $\underset{a_1}{z = 0}$ $\underset{a_0}{t = -4}$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

4 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt die Abszissenachse bei $x = 3$ und verläuft durch $P(4/3)$ und $Q(1/4)$.

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

Bauplan:

$$\begin{array}{l|l|}
f(3) = 0 & a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 = 0 \\
f'(3) = 0 & 3a_3 \cdot 3^2 + 2 \cdot a_2 \cdot 3 + a_1 = 0 \\
f(4) = 3 & a_3 \cdot 4^3 + a_2 \cdot 4^2 + a_1 \cdot 4 + a_0 = 3 \\
f(1) = 4 & a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = 4
\end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l}
27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 0 \\
27a_3 + 6a_2 + a_1 = 0 \\
64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 3 \\
a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 4
\end{array}\right|$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{3}x^2 + 4x + 3}$$

7 Der Graph einer zur Ordinatenachse achsensymmetrischen ganzrationalen Funktion 4. Grades verläuft durch den Ursprung und hat einen Hochpunkt $H(2/4)$.

$$f(x) = a_4x^4 + \cancel{a_3x^3} + a_2x^2 + \cancel{a_1x} + a_0$$

wg. Symmetrie: $f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$f'(x) = 4a_4x^3 + 2a_2x$

Bauplan:

$$\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(2)=4 \\ f'(2)=0 \end{array} \left| \begin{array}{lllll} 0 & + \; 0 & + \; a_0 & = 0 \\ a_4 \cdot 2^4 & + \; a_2 \cdot 2^2 & + \; a_0 & = 4 \\ 4a_4 \cdot 2^3 & + \; 2 \cdot a_2 \cdot 2 & & = 0 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{lllll} 0 & + \; 0 & + \; a_0 & = 0 \\ 16a_4 & + \; 4a_2 & + \; a_0 & = 4 \\ 32a_4 & + \; 4a_2 & + \; 0 & = 0 \end{array} \right|$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$$

5 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat bei $x = 2$ eine Tangente mit der Steigung 38, bei $x = -\frac{1}{9}$ und bei $x = 0$ verlaufen die Tangenten parallel zur Abszissenachse. Die Ordinatenachse wird bei 1 geschnitten.

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

<u>Bauplan:</u>

$$\begin{array}{l|l|}
f'(2) = 38 & 3a_3 \cdot 2^2 + 2 \cdot a_2 \cdot 2 + a_1 + 0 = 38 \\
f'(-\frac{1}{9}) = 0 & 3a_3 \cdot (-\frac{1}{9})^2 + 2 \cdot a_2 \cdot (-\frac{1}{9}) + a_1 + 0 = 0 \\
f'(0) = 0 & 3a_3 \cdot 0^2 + 2 \cdot a_2 \cdot 0 + a_1 + 0 = 0 \\
f(0) = 1 & 0 + 0 + 0 + a_0 = 1
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 12a_3 + 4a_2 + a_1 + 0 = 38 \\ \frac{1}{27}a_3 - \frac{2}{9}a_2 + a_1 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + a_1 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + a_1 = 1 \end{array} \right|$$

$$\boxed{f(x) = 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1}$$

8 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat im Ursprung einen Sattelpunkt und bei $x = \frac{3}{2}$ einen Extrempunkt. Ferner verläuft er durch $P(1/-1)$.

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$f'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$
$$f''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$$

Bauplan:

$$\begin{array}{l|l|}
f(0) = 0 & 0 + 0 + 0 + 0 + a_0 = 0 \\
f'(0) = 0 & 0 + 0 + 0 + a_1 + 0 = 0 \\
f''(0) = 0 & 0 + 0 + 2a_2 + 0 + 0 = 0 \\
f'(\frac{3}{2}) = 0 & 4a_4 \cdot (\frac{3}{2})^3 + 3a_3 \cdot (\frac{3}{2})^2 + 2a_2 \cdot (\frac{3}{2}) + a_1 + 0 = 0 \\
f(1) = -1 & a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -1
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 0 + 0 + 0 + 0 + a_0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + a_1 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 2a_2 + 0 + 0 = 0 \\ 13{,}5\,a_4 + 6{,}75\,a_3 + 3\,a_2 + a_1 + 0 = 0 \\ a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -1 \end{array} \right|$$

nicht mit WTR bestimmbar

11 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades berührt die Abszissenachse bei $x = 2$ und hat Wendepunkte im Ursprung und bei $x = 1{,}5$. Die Steigung im Ursprung beträgt 1.

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$f'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$
$$f''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$$

Bauplan:

$\cancel{f(2) = 0}$

$f'(2) = 0$

$f(0) = 0$

$f''(0) = 0$

$f''(1{,}5) = 0$

$f'(0) = 1$

$$\left|\begin{array}{l} 4a_4\cdot 2^3 + 3a_3\cdot 2^2 + 2a_2\cdot 2 + a_1 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + a_0 = 0 \\ 0 + 0 + 2a_2 + 0 + 0 = 0 \\ 12a_4\cdot 1{,}5^2 + 6a_3\cdot 1{,}5 + 2a_2 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + a_1 + 0 = 1 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 32a_4 + 12a_3 + 4a_2 + a_1 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + a_0 = 0 \\ 0 + 0 + 2a_2 + 0 + 0 = 0 \\ 27a_4 + 9a_3 + 2a_2 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + a_1 + 0 = 1 \end{array}\right|$$

nicht mit WTR bestimmbar ☹

AUFGABE:

Die Mitglieder der Familie Schulz sind stolze Besitzer eines Gartenteichs mit einer Wasseroberfläche von insgesamt 50 m². Da die Mutter der Familie Seerosen so sehr mag, besorgt ihr Gatte einige Exemplare, die zusammengenommen eine Fläche von vier Quadratmetern bedecken und setzt diese in den Teich. Was er leider nicht bedacht hat, ist das rasante Wachstum dieser Pflanzen. Denn pro Woche wächst die von den Seerosen bedeckte Fläche um sage und schreibe 15%.

Quelle: https://www.tierheim-verlorenwasser.de/aktuelles/3859-seerosen.html

Tochter Lisa interessiert sich sehr für das Fach Biologie und hat daher schon davon gehört, dass Seerosenkolonien sehr schnell wachsen können. Sie notiert deshalb in zweiwöchigen Abständen in einer Tabelle, wie viel Fläche die Seerosen bereits eingenommen haben:

Messpunkt	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
Woche	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Fläche Seerosen	4 m²	5,29 m²	7 m²	9,25 m²	12,24 m²	16,18 m²	21,4 m²	28,3 m²	37,43 m²

Die erfasste Messreihe findest du im GeoGebra-Applet „Seerosen" bereits in Form von Punkten dargestellt.

3) Berechne mit der notierten Funktionsgleichung, wie groß die von den Seerosen bedeckte Fläche nach 18 Wochen ist.
Zusatzfrage für kritische Geister: Ist das aufgestellte Rechenmodell wirklich realistisch? Welchen wichtigen Effekt, der in etwa nach 10 Wochen einsetzt, lässt es völlig außer Acht?

4) Inwiefern lassen sich die Zahlenwerte von „c" und „a" im blau gefärbten Aufgabentext wiederfinden, sodass man auch ohne die Verwendung von GeoGebra die Funktionsgleichung aufstellen kann? Betrachte in diesem Zusammenhang vor allem den „a"-Wert.

5) Probiere nun die Funktionsgleichung (ohne die Verwendung von Hilfsmitteln wie GeoGebra) zu der nachfolgenden Aufgabe aufzustellen und die weiteren Aufgabenteile zu lösen: $f(x) = 36 \cdot 1{,}12^x$ $c = 36$ // $a = 1{,}12$

> Auf einem Inselarchipel im Südatlantik hat sich eine neue Seevogelart etabliert. Zum Jahresbeginn 2020 wurden bei einer Zählung insgesamt 36 Exemplare registriert. Man geht davon aus, dass die Population der Vögel jährlich exponentiell um 12% wächst.
> a) Stelle eine Funktion auf, die diesen Sachverhalt mathematisch beschreibt.
> b) Wie groß ist die Vogelpopulation nach 8, bzw. nach 13 Jahren?
> c) Wie viele Jahre dauert es, bis die Vogelpopulation 500 Tiere umfasst.

6) Konntest du die Teilaufgabe c lösen? Falls nicht (wovon ich fast ausgehe, da man hierzu spezielle Rechentechniken benötigt), beschreibe **<u>möglichst genau</u>**, was das Problem dabei war.

$m^2 \rightarrow \boxed{f(x) = 4 \cdot 1{,}15^x} \leftarrow$ Wochen

3) $\underline{x = 18:}$

$f(18) = 4 \cdot 1{,}15^{18}$

$f(18) \approx 49{,}5$

Antwort: Nach 18 Wochen sind etwa $49{,}5\,m^2$ des Teichs mit Seerosen bedeckt.

Anz. Vögel

5) a) $c = 36$

$a = 1{,}12$

$\boxed{f(x) = 36 \cdot 1{,}12^x} \leftarrow$ Jahre

b) $f(8) = 36 \cdot 1{,}12^8 \approx 89{,}1 \approx \underline{\underline{89}}$

$f(13) = 36 \cdot 1{,}12^{13} \approx 157{,}09 \approx \underline{\underline{157}}$

Antwort: ....

c) $500 = 36 \cdot 1{,}12^x \quad | :36$

$\frac{125}{9} = 1{,}12^x \quad | \ln$

$\ln\left(\frac{125}{9}\right) = \ln\left(1{,}12^x\right)$

$\ln\left(\frac{125}{9}\right) = x \cdot \ln(1{,}12) \quad | : \ln(1{,}12)$

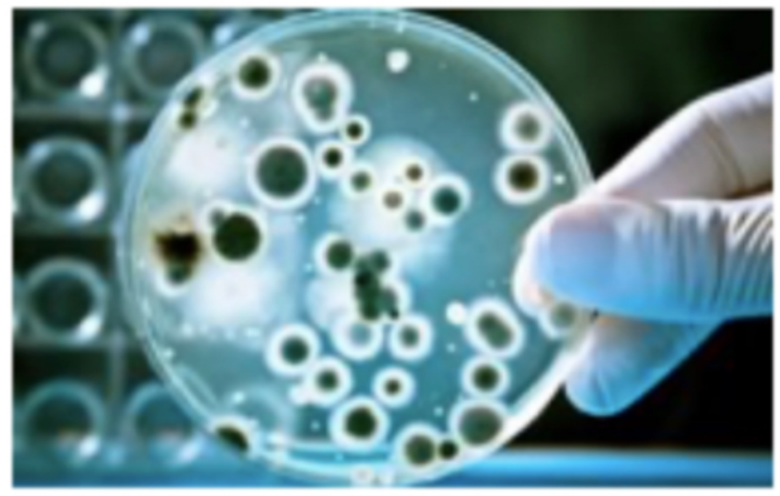
$\frac{\ln\left(\frac{125}{9}\right)}{\ln(1{,}12)} = x$

$\underline{\underline{23{,}22 \approx x}}$

Antwort: Nach etwas mehr als 23 Jahren sind es insg. ca. 500 Vögel.

Aufgabe 1:

Eine Bakterienkultur in einem Labor wächst exponentiell mit einer Wachstumsrate von 17% pro Tag. Zu Beginn werden etwa 300 Bakterien in der Petrischale auf eine Nährlösung aufgetragen.



Quelle: https://albert-schweitzer-stiftung.de/aktuell/gesundheitsrisiken-fur-anwohner-von-tiefabriken

a) Versuche den beschrieben Sachverhalt funktionell darzustellen.
b) Wie viele Bakterien befinden sich am 5. Tag in der Petrischale?
c) Zeichne die Kurve der Funktion in ein hierfür geeignetes Koordinatensystem.

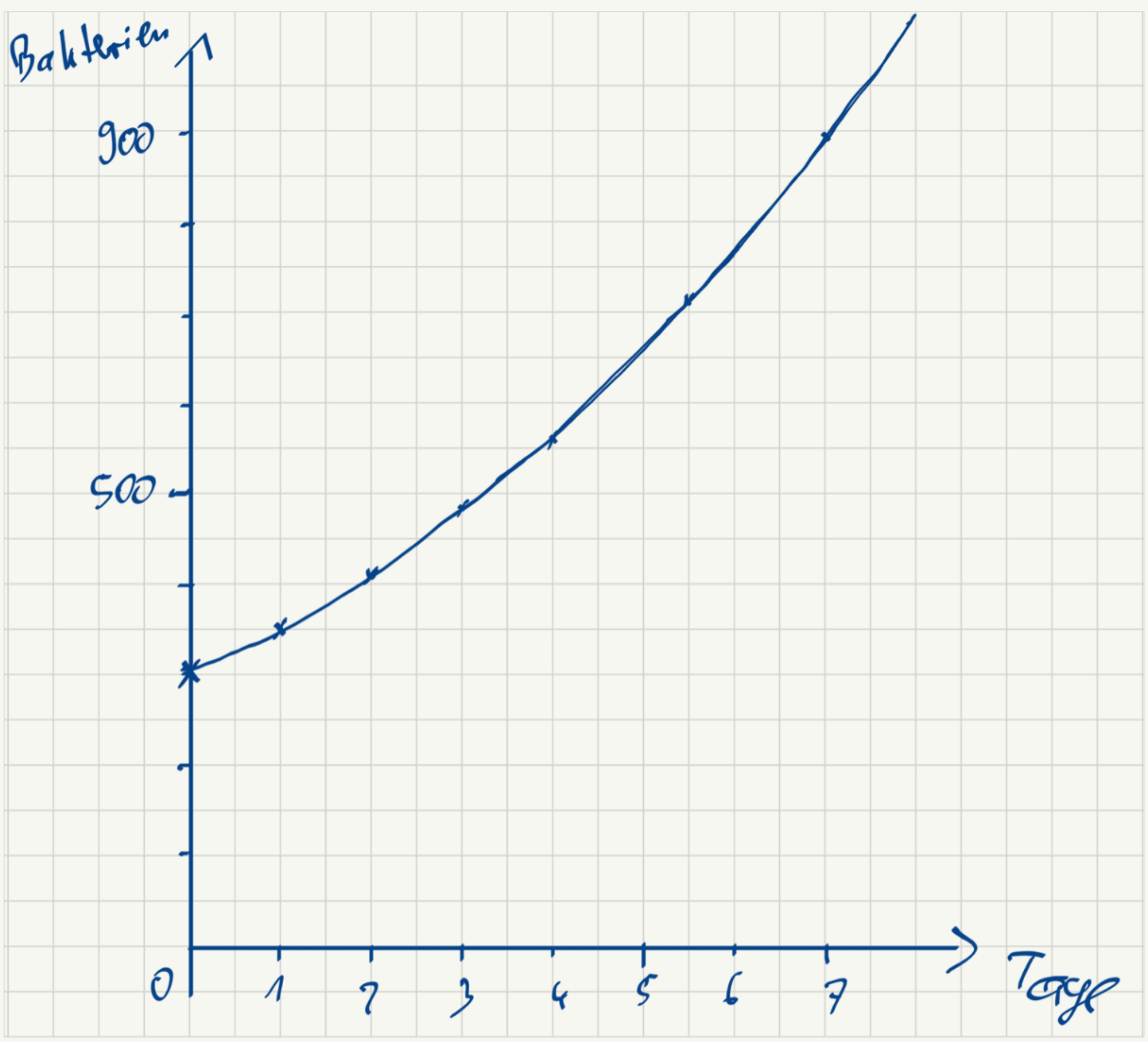
a) $f(x) = 300 \cdot 1{,}17^x$

b) $f(5) = 300 \cdot 1{,}17^5$

$\underline{\underline{f(5) \approx 657{,}7}}$

Antwort: Am 5. Tag sind es beinahe 660 Bakterien.

c)



Aufgabe 2:

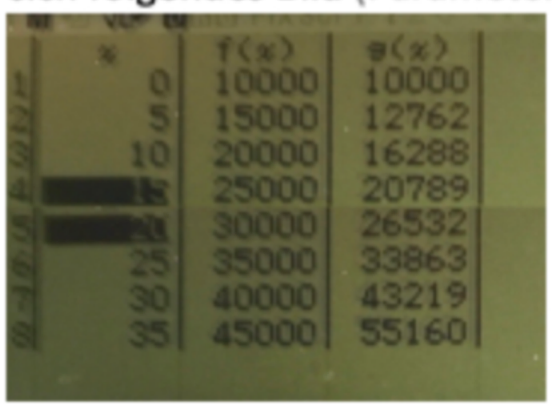
Dragan Djuric feiert heute seinen 40. Geburtstag. An diesem Tag denken viele Menschen über ihr Alter und über das Altern als solches nach. Dragan beschließt daher, eine größere Geldsumme als zusätzliche Altersvorsorge zu investieren, damit er beim Eintritt in den Ruhestand in etwa 25 Jahre nach wie vor ein komfortables Leben führen kann.

In diesem Zusammenhang hat er zwei Angebote eingeholt:

Angebot 1:	**Startkapital 10.000 €**	**-**	**lineare Verzins mit 10% Jahreszins**
Angebot 2:	**Startkapital 10.000 €**	**-**	**exponentielle Verzinsung mit 5% Jahreszins**

a) Versuche die beiden Angebote als Funktionen darzustellen.

b) Gibt man beide Funktionen in die Tabellenfunktion des Taschenrechners ein, ergibt sich folgendes Bild (Parameter für WTR-Tabellenfunkt.: Start: 0 End: 35. Inkre: 5):



x	f(x)	g(x)
0	10000	10000
5	15000	12762
10	20000	16288
15	25000	20789
20	30000	26532
25	35000	33863
30	40000	43219
35	45000	55160

f(x): Angebot 1 (linearer Verzinsung)

g(x): Angebot 2 (exponentielle Verzinsung)

Wie sollte sich Dragan deiner Meinung nach entscheiden? Begründe deine Antwort.

c) Zeichne deine bei a) aufgestellten Funktionen in ein hierfür geeignetes Koordinatensystem.

a)

Angebot 1) linear

$g(x) = 1000 \cdot x + 10000$

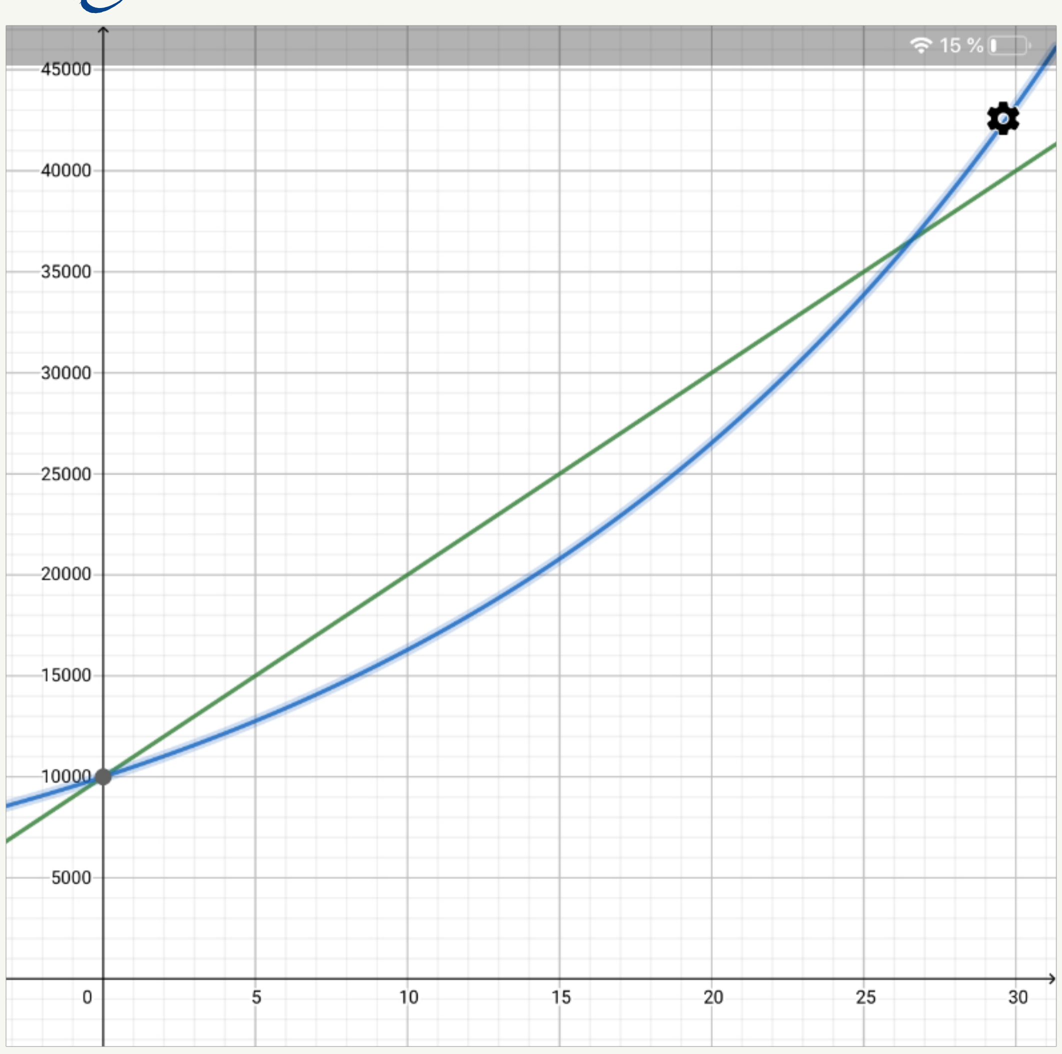
Angebot 2) exponentiell

$f(x) = 10000 \cdot 1{,}05^x$

b) Dragan sollte Angebot 2 wählen. Dieses ist zum Zeitpunkt des Eintritts in den Ruhestand zwar noch minimal unrentabler als Angebot 1, wird aber schon kurz danach deutlich lukrativer.

c)

€



Jahre

Aufgabe 3:

http://www.presse-service.de/data.aspx/medien/164906P.JPG

Manche Bohnenpflanzen wachsen unglaublich schnell. Das stellt auch Sinan fest, vor dessen Zimmerfenster einige Bohnenranken wachsen. Eines Tages ist Sinan so beeindruckt, dass er die Höhe einer der Bohnenranken misst und sein Messergebnis von 1,27 m notiert. Am darauffolgenden Tag misst er genau zur selben Uhrzeit dieselbe Pflanze wieder: 1,60 m. Sinan weiß, dass Bohnenranken in ihrer Frühphase nahezu exponentiell wachsen, und möchte das Wachstum in Prozent wissen.

Kannst du Sinan auf die Sprünge helfen?

Tag 1	Tag 2
1,27	1,60

$$a = \frac{\text{Nachfolger}}{\text{Vorgänger}} = \frac{1{,}6}{1{,}27} \approx \underline{\underline{1{,}26}}$$

$\hat{=}$ Wachstum von 26% pro Tag

5. Rekonstruktionen
Die Funktion $f(x) = c \cdot a^x$ geht durch die Punkte P und Q. Bestimmen Sie a und c.
a) $P(-1|4)$, $Q(0|0{,}25)$
c) $P(-1|6)$, $Q(1|24)$
e) $P(-2|16)$, $Q(2|1)$

a)

x	-1	0
$f(x)$	4	$0{,}25$

$$a = \frac{\text{Nachfolger}}{\text{Vorgänger}} = \frac{0{,}25}{4} = 0{,}0625$$

$$c = 0{,}25$$

$$\boxed{f(x) = 0{,}25 \cdot 0{,}0625^x}$$

c)

x	-1	1
$f(x)$	6	24

$$a = \sqrt[2]{\frac{24}{6}} = 2$$

c:

$$\boxed{f(x) = c \cdot a^x}$$

$$24 = c \cdot 2^1$$
$$24 = c \cdot 2 \quad | : 2$$
$$12 = c$$

$$\boxed{f(x) = 12 \cdot 2^x}$$

e)

x	-2	2
$f(x)$	16	1

$$a = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f(x) = c \cdot a^x}$$

$$1 = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$1 = c \cdot \frac{1}{4} \quad | : \frac{1}{4}$$
$$4 = c$$

$$\boxed{f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x}$$

3. Umkehrwerte
Bestimmen Sie die Stelle x, an welcher die Funktion f den Wert y annimmt.

a) $f(x) = 2 \cdot 4^x$, $y = 4$
b) $f(x) = 0{,}2 \cdot 5^x$, $y = 25$
c) $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$, $y = 4{,}5$

a)
$$4 = 2 \cdot 4^x \quad | :2$$
$$2 = 4^x \quad | \ln$$
$$\ln(2) = x \cdot \ln(4) \quad | :\ln(4)$$
$$\frac{\ln(2)}{\ln(4)} = x$$
$$\underline{\underline{\tfrac{1}{2} = x}}$$

b)
$$25 = 0{,}2 \cdot 5^x \quad | :0{,}2$$
$$125 = 5^x \quad | \ln$$
$$\ln(125) = x \cdot \ln(5) \quad | :\ln(5)$$
$$\frac{\ln(125)}{\ln(5)} = x$$
$$\underline{3 = x}$$

c)
$$4{,}5 = 2 \cdot 1{,}5^x \quad | :2$$
$$2{,}25 = 1{,}5^x \quad | \ln$$
$$\ln(2{,}25) = x \cdot \ln(1{,}5) \quad | :\ln(1{,}5)$$
$$\frac{\ln(2{,}25)}{\ln(1{,}5)} = x$$
$$\underline{\underline{2 = x}}$$

---

4. Schnittpunkte
Wo schneiden sich f und g?

a) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$, $g(x) = \frac{1}{27} \cdot 9^x$
b) $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$
c) $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$, $g(x) = 6 \cdot 3^x$

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

a)
$$\frac{1}{3} \cdot 3^x = \frac{1}{27} \cdot 9^x \quad | : \frac{1}{27}$$
$$9 \cdot 3^x = 9^x \quad | :3^x$$
$$9 = \frac{9^x}{3^x}$$
$$9 = \left(\frac{9}{3}\right)^x$$
$$9 = 3^x \quad | \ln$$
$$\ln(9) = x \cdot \ln(3) \quad | :\ln(3)$$
$$\frac{\ln(9)}{\ln(3)} = x$$
$$\underline{2 = x}$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 3^2$$
$$\underline{\underline{f(2) = 3}}$$

$$\underline{\underline{S(2/3)}}$$

b) $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad | :2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad | : \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{4}\right)^x} = 8$

$\left(\frac{0{,}5}{0{,}25}\right)^x = 8 \quad | \ln$

$x \cdot \ln(2) = \ln(8) \quad | : \ln(2)$

$x = \frac{\ln(8)}{\ln(2)}$

$\underline{\underline{x = 3}}$

$f(3) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\underline{\underline{f(3) = 0{,}25}}$

$S(3 \mid 0{,}25)$

c) $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = 6 \cdot 3^x$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x} = 6 \cdot 3^x \quad | :6$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x} = 3^x \quad | \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$\frac{1}{4} = 3^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$\frac{1}{4} = \left(3 \cdot \frac{2}{3}\right)^x$

$\frac{1}{4} = 2^x \quad | \ln$

$\ln(0{,}25) = x \cdot \ln(2) \quad | : \ln(2)$

$\frac{\ln(0{,}25)}{\ln(2)} = x$

$-2 = x$

$g(-2) = 6 \cdot 3^{-2}$

$\underline{\underline{g(-2) = \frac{2}{3}}}$

$\underline{\underline{S\left(-2 \mid \frac{2}{3}\right)}}$

8. Ein Abnahmeprozess

20000 Eisbären leben rund um den Nordpol. Sie sind zu Symbolen für die Gefahren des Klimawandels geworden. Es wurde festgestellt, dass die Population kleiner wird und um 1% jährlich schrumpft. Wir nehmen einmal an, dass die Population sich nach der folgenden Formel entwickelt:

$N(t) = c \cdot a^t$ (t in Jahren).

a) Wie lautet die Gleichung von N?

b) Um welche Zahl nimmt die Population in den ersten beiden Jahren ab?

c) Wann beträgt die Zahl der Bären nur noch 15000?

a) $\boxed{f(x) = c \cdot a^x}$

Startwert (c) Wachstumsfaktor (a)

$N(t) = 20.000 \cdot 0{,}99^t$

b) $N(2) = 20.000 \cdot 0{,}99^2$

$N(2) = 19.602$

Differenz: $20.000 - 19.602 = \underline{398}$

Antwort: In den ersten beiden Jahren nimmt die Population um fast 400 Eisbären ab. ☹

c) $15\,000 = 20\,000 \cdot 0{,}99^t \quad | : 20\,000$

$\frac{3}{4} = 0{,}99^t \quad | \ln$

$\ln\left(\frac{3}{4}\right) = t \cdot \ln(0{,}99) \quad | : \ln(0{,}99)$

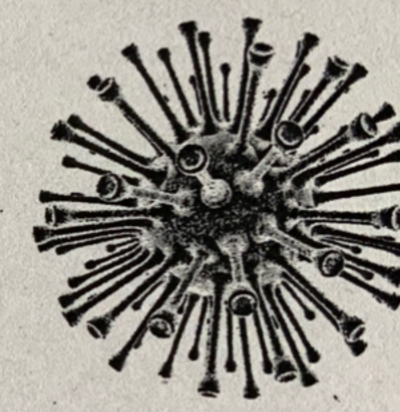
$\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{\ln(0{,}99)} = t$

$28{,}62 \approx t$

Antwort: Nach etwas mehr $28\frac{1}{2}$ Jahren gibt es nur noch 15.000 Eisbären am Nordpol.

Übungen

7. Influenza
Die gefürchtete *Influenza* unterscheidet sich vom relativ harmlosen grippalen Infekt durch schlagartigen Beginn mit 40 °C Fieber und schwerem Krankheitsgefühl. Der Influenzaerreger kann sich nämlich in den Atemwegen aufgrund einer raffinierten Strategie explosionsartig verbreiten. Innerhalb von 6 Stunden entwickeln sich aus einem Virus 1500 neue Viren.



a) Wie lautet das Wachstumsgesetz, wenn die Infektion durch 100 Erreger verursacht wird?
b) Wann übersteigt die Anzahl der Erreger die Millionen- bzw. die Milliardengrenze?
c) Wie groß ist die Verdopplungszeit des Prozesses?

7

a)

x	0	6
$f(x)$	1	1500

$$a = \sqrt[6]{\frac{1500}{1}} \approx 3{,}38$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = 100 \cdot 3{,}38^x}$$

b)

Mio:

$$1\,000\,000 = 100 \cdot 3{,}38^x \quad |:100$$
$$10\,000 = 3{,}38^x \quad |\ln$$
$$\ln(10\,000) = x \cdot \ln(3{,}38) \quad |:\ln(3{,}38)$$
$$\frac{\ln(10\,000)}{\ln(3{,}38)} = x$$
$$7{,}56 \approx x$$

Mrd:

$$1\,000\,000\,000 = 100 \cdot 3{,}38^x \quad |:100$$
$$10\,000\,000 = 3{,}38^x \quad |\ln$$
$$\ln(10\,000\,000) = x \cdot \ln(3{,}38)$$
$$\frac{\ln(10\,000\,000)}{\ln(3{,}38)} = x$$
$$13{,}2 \approx x$$

Antwort: Nach etwas mehr als $7\frac{1}{2}$ Stunden sind es 1 Mio Viren. Nach etwas mehr als 13 Stunden sind es 1 Mrd.

c)

$$200 = 100 \cdot 3{,}38^x \quad |:100$$
$$2 = 3{,}38^x \quad |\ln$$
$$\ln(2) = x \cdot \ln(3{,}38) \quad |:\ln(3{,}38)$$
$$\frac{\ln(2)}{\ln(3{,}38)} = x$$
$$0{,}57 \approx x$$

Antwort: Die Verdopplungszeit beträgt etwas mehr als eine halbe Stunde.

8. Luftdruck

Der Luftdruck nimmt mit steigender Höhe über dem Meeresspiegel exponentiell um etwa 12% pro Kilometer ab. In Meereshöhe herrscht ein Luftdruck von ca. 1013 hPa.

a) Geben Sie eine Funktion an, die die Druckabnahme modelliert. Zeichnen Sie den Graphen.

b) Berechnen Sie den Luftdruck auf der Zugspitze (3000 m) und dem Mount Everest (8900 m).

c) Wie viele Meter muss man steigen, bis sich der Luftdruck halbiert hat?

d) Der Mensch kann einen Luftdruck bis hinunter zu 400 mbar aushalten. Bis zu welcher Höhe kann ein Mensch ohne Atemmaske aufsteigen?

a) $f(x) = 1013 \cdot 0{,}88^x$

b) $3000\,m \hat{=} 3\,km$

$8900\,m \hat{=} 8{,}9\,km$

$f(3) = 1013 \cdot 0{,}88^3$

$f(3) = 690{,}33$

$f(8{,}9) = 1013 \cdot 0{,}88^{8{,}9}$

$f(8{,}9) = 324{,}72$

Antwort: ...

c) $t_{1/2} = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}88)} \approx \underline{\underline{5{,}4}}$

Antwort:

d) $400 = 1013 \cdot 0{,}88^x \quad | : 1013$

$\frac{400}{1013} = 0{,}88^x \quad | \ln$

$\ln\left(\frac{400}{1013}\right) = x \cdot \ln(0{,}88) \quad | : \ln(0{,}88)$

$\frac{\ln\left(\frac{400}{1013}\right)}{\ln(0{,}88)} = x$

$7{,}27 \approx x$

$\hat{=} 7270\,m$

Antwort: . . —

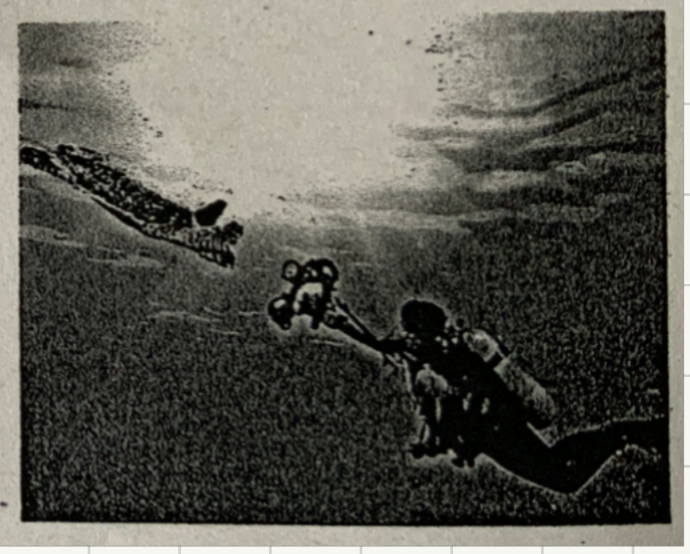
10. **Helligkeit unter Wasser**

leicht

Die Helligkeit nimmt mit zunehmender Wassertiefe dramatisch ab, nämlich exponentiell. In 16 Metern Tiefe sind nur noch 15% der Lichtmenge übrig.

a) Geben Sie eine Funktion an, welche den Prozentsatz der Lichtes in Abhängigkeit von der Tauchtiefe beschreibt (Oberfläche: 100%).

b) In welcher Tiefe ist ein Taucher, dessen Belichtungsmesser nur 0,1% des Tageslichtes misst?



a)

x	0	16
$f(x)$	100	85

$$a = \sqrt[16]{\frac{85}{100}} \approx 0{,}98989$$

$$f(x) = 100 \cdot 0{,}98989^x$$

b)

$$0{,}1 = 100 \cdot 0{,}98989^x \quad | :100$$

$$0{,}001 = 0{,}98989^x \quad | \ln$$

$$\ln(0{,}001) = x \cdot \ln(0{,}98989) \quad | : \ln(0{,}98989)$$

$$\frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}98989)} = x$$

$$\underline{679{,}8 \approx x}$$

Antwort: Man muss fast 680 Meter tief tauchen, um nur noch 0,1% Helligkeit zu haben.

12 Taschengeld

Peter bekommt 10 € Taschengeld im Monat. Seine Eltern sehen ein, dass dieser Betrag für einen Jungen seines Alters nicht ausreicht. Seine Eltern erklären sich damit einverstanden, im kommenden Jahr das Taschengeld jeden Monat um 1,50 € zu erhöhen. Peter schlägt vor, sein Taschengeld jeden Monat um 10% zu erhöhen.

Leicht

a) Erfassen Sie für beide Varianten die Taschengeldzahlungen des Jahres tabellarisch.

b) Wie viel Taschengeld steht Peter bei beiden Varianten im gesamten Jahr zur Verfügung?

c) Angenommen, die Vereinbarung soll nicht nur für ein Jahr gelten, sondern bis zur Volljährigkeit von Peter in 2,5 Jahren. Wie viel Taschengeld würde er in beiden Varianten im letzten Monat vor der Volljährigkeit erhalten?

a)

Linear:

$g(x) = 1{,}5x + 10$

exponentiell:

$f(x) = 10 \cdot 1{,}1^x$

Annahme: Schon im Januar gibt es die erste Erhöhung.

b)

$g(1) = 1{,}5 \cdot 1 + 10 = 11{,}5$	$f(1) = 10 \cdot 1{,}1^1 = 11$
$g(2) = 1{,}5 \cdot 2 + 10 = 13$	$f(2) = 10 \cdot 1{,}1^2 = 12{,}1$
$g(3) = 1{,}5 \cdot 3 + 10 = 14{,}5$	$f(3) = 10 \cdot 1{,}1^3 = 13{,}31$
$g(4) = 1{,}5 \cdot 4 + 10 = 16$	$f(4) = 10 \cdot 1{,}1^4 \approx 14{,}64$
$g(5) = 1{,}5 \cdot 5 + 10 = 17{,}5$	$f(5) = 10 \cdot 1{,}1^5 \approx 16{,}11$
$g(6) = 1{,}5 \cdot 6 + 10 = 19$	$f(6) = 10 \cdot 1{,}1^6 \approx 17{,}72$
$g(7) = 1{,}5 \cdot 7 + 10 = 20{,}5$	$f(7) = 10 \cdot 1{,}1^7 \approx 19{,}49$
$g(8) = 1{,}5 \cdot 8 + 10 = 22$	$f(8) = 10 \cdot 1{,}1^8 \approx 21{,}44$
$g(9) = 1{,}5 \cdot 9 + 10 = 23{,}5$	$f(9) = 10 \cdot 1{,}1^9 \approx 23{,}58$
$g(10) = 1{,}5 \cdot 10 + 10 = 25$	$f(10) = 10 \cdot 1{,}1^{10} \approx 25{,}94$
$g(11) = 1{,}5 \cdot 11 + 10 = 26{,}5$	$f(11) = 10 \cdot 1{,}1^{11} \approx 28{,}53$
$g(12) = 1{,}5 \cdot 12 + 10 = 28$	$f(12) = 10 \cdot 1{,}1^{12} \approx 31{,}38$
Σ: 237 €	Σ: 235,24 €

c) Noch 29 Monate bis 1 Monat vor Volljährigkeit:

$g(29) = 1{,}5 \cdot 29 + 10 = 53{,}50$ €

$f(29) = 10 \cdot 1{,}1^{29} = 158{,}63$ €

Antwort: ...

13. Immobilien

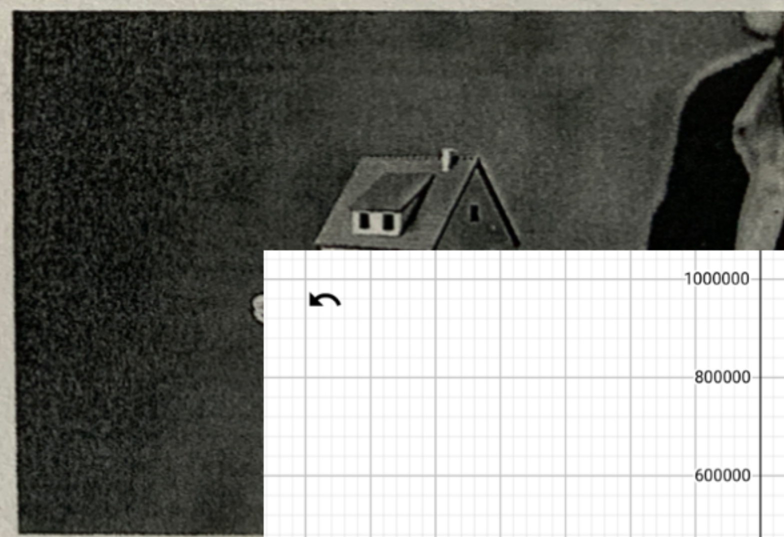
Ein 45-jähriger Anleger will 300 000 Euro zur Alterssicherung in einem Haus anlegen. Zwei Angebote kommen in die nähere Auswahl: Ein großes Haus in mittlere Lage, dessen Wert jährlich um 20 000 Euro steigt, sowie ein kleineres Haus in guter Lage, dessen Wert jährlich um 4 % zunimmt. f und g seien die Funktionen, die den Wert der Häuser zur Zeit t beschreiben.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von f und g. Skizzieren Sie die Graphen von f und g für $0 \le t \le 30$ in einem Koordinatensystem.

b) Wie sieht die Bilanz aus, wenn der Anleger mit 65 Jahren in den Ruhestand tritt?

c) Wann sind die Häuser etwa gleich viel wert?

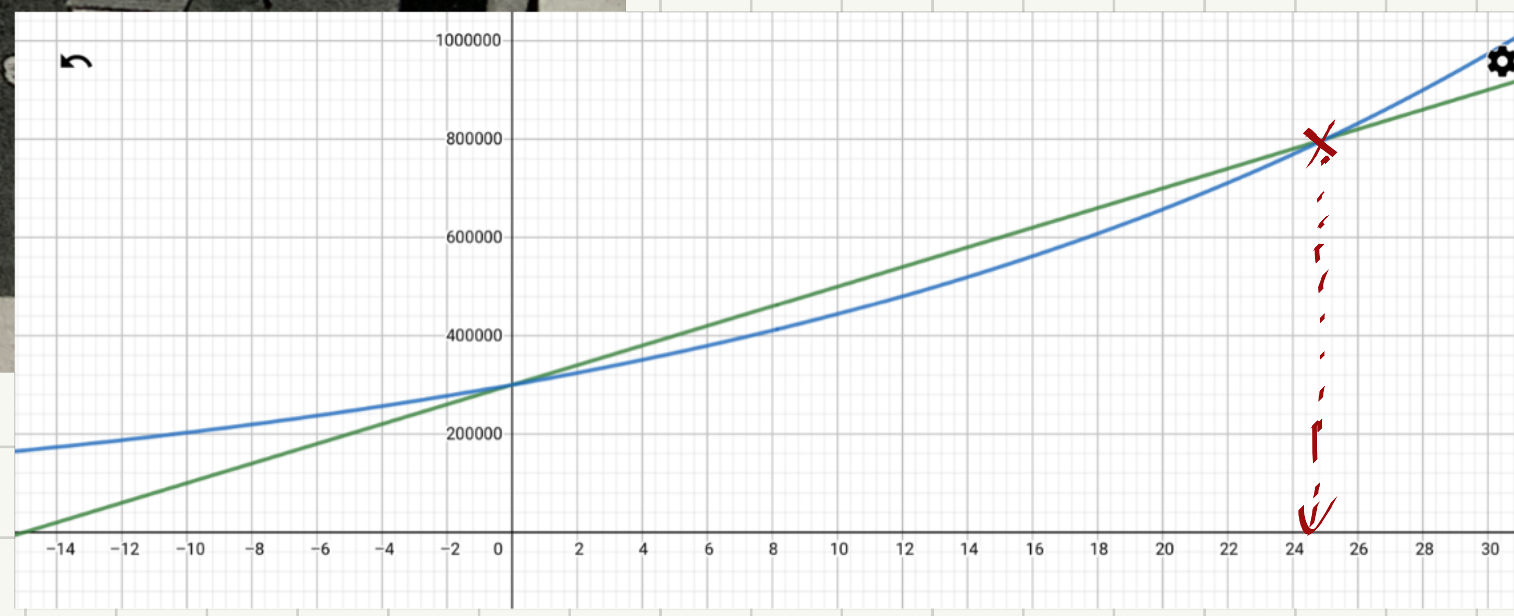
d) Welchen jährlichen Wertzuwachs müsste das große Haus haben, wenn die Bilanz 30 Jahre lang günstiger sein soll als für das kleine Haus?



a)

$g(x) = 20\,000x + 300\,000$

$f(x) = 300\,000 \cdot 1{,}04^x$



b) $65 - 45 = \underline{20 \text{ Jahre}}$

$g(20) = 20\,000 \cdot 20 + 300\,000 = 700.000$

$f(20) = 300\,000 \cdot 1{,}04^{20} \approx 657.336{,}94$

c) $20\,000x + 300\,000 = 300.000 \cdot 1{,}04^x \quad | \ln$

$\ln(20\,000 \cdot x + 300\,000) = \ln(300\,000 \cdot 1{,}04^x)$

$= \ln(300\,000) + x \cdot \ln(1{,}04)$

↯

nicht analytisch bestimmbar

↳ ZEICHNUNG

(siehe Grafik von a)

↳ ca. 24,5 Jahre

d) $f(30) = 300\,000 \cdot 1{,}04^{30}$

$f(30) \approx 973.019{,}25$

$973\,019{,}25 = z \cdot 30 + 300\,000 \quad | -300\,000$

$673\,019{,}25 = z \cdot 30 \quad | :30$

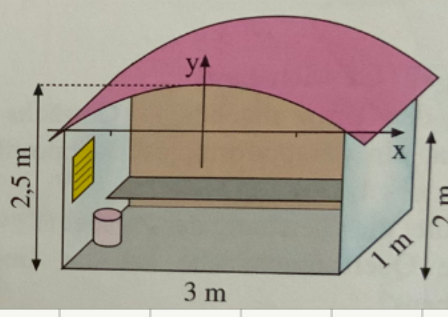
$\underline{\underline{22.433{,}98 \approx z}}$

Antwort: Der jährliche Wertzuwachs müsst größer als 22.433,98 € sein.

Integralrechnung:

9. Fläche zwischen Kurve und x-Achse
Gesucht ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall I. Fertigen Sie eine Skizze an.
a) $f(x) = x + 3$, $I = [0; 4]$ b) $f(x) = 2x^2 + 1$, $I = [1; 2]$ c) $f(x) = (2 - x)^2$, $I = [1; 3]$

10. Bushaltestelle
Der Rand des Daches hat die Form einer quadratischen Parabel, d.h. $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Ermitteln Sie zunächst die Koeffizienten des Dachprofils. Bestimmen Sie dann das Volumen des Häuschens.



9 a) $\boxed{A_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x}$

$A_0(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 3 \cdot 4$

$A_0(4) = 20$ $\quad A = 20\,FE$

b) $\boxed{A_0(x) = \frac{2}{3}x^3 + x}$

$A_0(2) = \frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2 = \frac{22}{3}$

$A_0(1) = \frac{2}{3} \cdot 1^3 + 1 = \frac{5}{3}$

$A = A_0(2) - A_0(1) = \frac{22}{3} - \frac{5}{3} = \frac{17}{3}\,FE$

c) $f(x) = (2-x)^2$

$f(x) = 4 - 4x + x^2$

$\boxed{A_0(x) = 4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3}$

$A_0(3) = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 + \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 3$

$A_0(1) = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{7}{3}$

$A = A_0(3) - A_0(1) = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}\,FE$

---

10 Bestimmen der Parabelfunktion

$SP(0|0{,}5) \longrightarrow f(x) = a \cdot (x - 0)^2 + 0{,}5$

$P(1{,}5|0) \longrightarrow 0 = a \cdot (1{,}5 - 0)^2 + 0{,}5 \quad | -0{,}5$

$-0{,}5 = 2{,}25a \quad | : 2{,}25$

$-\frac{2}{9} = a$

$f(x) = -\frac{2}{9} \cdot (x - 0)^2 + 0{,}5$

$f(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 0{,}5$

$A_0(x) = -\frac{\frac{2}{9}}{3}x^3 + 0{,}5x$

$\boxed{A_0(x) = -\frac{2}{27}x^3 + 0{,}5x}$

Querschnittsfläche unter Parabeldach:

rechte Seite:

$A_0(1{,}5) = -\frac{2}{27} \cdot 1{,}5^3 + 0{,}5 \cdot 1{,}5$

$A_0(1{,}5) = 0{,}5$

komplett: $2 \cdot 0{,}5 = 1$

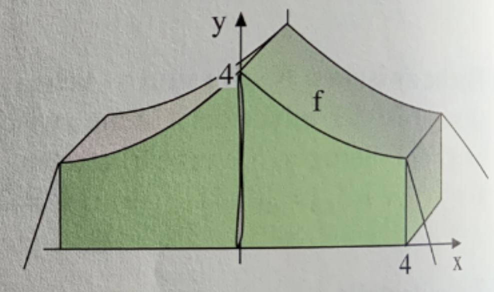
Rechteckfläche unterm Parabeldach:

$A = a \cdot b = 3 \cdot 2 = 6$

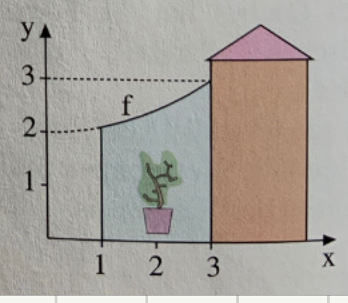
Gesamtquerschnittsfläche: $6 + 1 = 7\,(m^2)$

Rauminhalt: $7 \cdot 1 = 7\,(m^3)$

Übung 11 Zelt
Welches Luftvolumen hat das abgebildete 4 m lange Mannschaftszelt? Sein Querschnittsprofil kann durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - x + 4$ für $0 \le x \le 4$ modelliert werden.



Übung 12 Gewächshaus
Das an den Turm angebrachte Gewächshaus hat ein parabelförmiges Dachprofil $f(x) = ax^2 + b$ $(1 \le x \le 3)$.
Wie lautet die Gleichung der Parabel f?
Welche Querschnittsfläche hat das Gewächshaus?



(11) $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - x + 4$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{1}$$

$$A_0(x) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{1}} x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x$$

$$A_0(x) = \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_0(4) &= \frac{1}{24} \cdot 4^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 \\ A_0(4) &= \frac{32}{3} \end{aligned}}$$

Grundfläche: $G = 2 \cdot A_0(4) = 2 \cdot \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$

Volumen: $V = G \cdot h = \frac{64}{3} \cdot 4 = \frac{256}{3} \approx 85{,}3\ (m^3)$

Antwort: Das Zelt hat ein Luftvolumen von etwa 85,3 Qubikmetern.

S. 29 (1)

a) $\int 2 \cdot e^{3-2x}$

$$F(x) = \frac{1}{-2} \cdot 2 \cdot e^{3-2x} + C$$

$$F(x) = -e^{3-2x} + C$$

Regel:
1) alles abschreiben und ein wenig Platz davor lassen.
2) $\frac{1}{\ldots}$ vor das Abgeschriebene
3) $\frac{\ldots}{\ldots}$ hier die Ableitung des Exponenten rein schreiben.

Tricks:
- $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$
- $\frac{8}{x^3} = 8 \cdot \frac{1}{x^3} = 8 \cdot x^{-3}$

1. Berechnung einer Stammfunktion

Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion F von f.

a) $f(x) = 3x^2 + 6$ b) $f(x) = \frac{6}{x^2}$ c) $f(x) = 4e^{-x}$ d) $f(x) = -2\cos x$

e) $f(x) = \sin(-x)$ f) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ g) $f(x) = 4x^{-3}$ h) $f(x) = e^{-kx}$

2. Berechnung unbestimmter Integrale

a) $\int x^6 dx$ b) $\int 6x^2 dx$ c) $\int n \cdot x^{2n-1} dx$ d) $\int (4x^2 + 2x) dx$

e) $\int (2x^3 - 4x + 1) dx$ f) $\int (ax^2 + 6x) dx$ g) $\int 3x^{-2} dx$ h) $\int \left(2x + \frac{1}{x}\right) \cdot x \, dx$

i) $\int \left(x + \frac{3}{x^2}\right) dx$ j) $\int e^x \cdot e^{x+2} dx$ k) $\int \frac{4}{e^x} dx$ l) $\int (\sin x + 2\cos x) dx$

1 a) $f(x) = 3x^2 + 6$

$F(x) = x^3 + 6x$

$F(x) = x^3 + 6x + 8$

b) $f(x) = \frac{6}{x^2} = 6 \cdot \frac{1}{x^2} = 6 \cdot x^{-2}$

$F(x) = \frac{6}{-1} \cdot x^{-1} = -6 \cdot \frac{1}{x} = -\frac{6}{x}$

$F(x) = -\frac{6}{x} - 12$

c) $f(x) = 4 \cdot e^{-x}$

$F(x) = \frac{1}{-1} \cdot 4 \cdot e^{-x} = -4 \cdot e^{-x}$

$F(x) = -4 \cdot e^{-x} + 17$

d) $f(x) = -2 \cdot \cos(x)$

$F(x) = \frac{1}{1} \cdot (-2) \cdot \sin(x) = -2 \cdot \sin(x)$

$F(x) = -2 \cdot \sin(x) + 1$

e) $f(x) = \sin(-x)$

$F(x) = \frac{1}{-1} \cdot [-\cos(-x)]$

$F(x) = \cos(-x) + 4$

f) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}x} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

$F(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 2$

g) $f(x) = 4 \cdot x^{-3}$

$F(x) = \frac{4}{-2} \cdot x^{-2} = -2 \cdot x^{-2}$

$F(x) = -2 \cdot x^{-2} - 5$

h) $f(x) = e^{-kx}$

$F(x) = \frac{1}{-k} \cdot e^{-kx} = -\frac{e^{-kx}}{k}$

$F(x) = -\frac{e^{-kx}}{k} - 31$

S. 53 (Buch)

12 a) $A = \int_0^1 (x^3)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4\right) = \underline{\underline{0{,}25\ (FE)}}$

c) $A = \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 1{,}5x^2\right]_1^3$

$= \left(\frac{1}{4}\cdot 3^4 - \frac{4}{3}\cdot 3^3 + 1{,}5\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{4}{3}\cdot 1^3 + 1{,}5\cdot 1^2\right) = \left(-\frac{9}{4}\right) - \left(\frac{5}{12}\right)$

$= -\frac{8}{3}$

Wegen der Nichtnegativitätsbedingung für Flächen gilt: $\underline{\underline{A = \frac{8}{3}\ FE}}$

---

13 a) Untersuchung der Nullstellen (ausnahmsweise mit WTR: $x_1 = 5$ $x_2 = -1$)

$\boxed{A_{ges} = A_1 + A_2}$

$A_1 = \int_{-1}^{5} \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}\right) dx = \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x\right]_{-1}^{5}$

$= \left(-\frac{1}{9}\cdot 5^3 + \frac{2}{3}\cdot 5^2 + \frac{5}{3}\cdot 5\right) - \left(-\frac{1}{9}\cdot(-1)^3 + \frac{2}{3}\cdot(-1)^2 + \frac{5}{3}\cdot(-1)\right)$

$= \left(\frac{100}{9}\right) - \left(-\frac{8}{9}\right) = \underline{\underline{12\ (FE)}}$

$A_2 = \int_5^6 \left(-\frac{1}{3}\cdot x^2 + \frac{4}{3}\cdot x + \frac{5}{3}\right) dx = \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x\right]_5^6$

$= \left(-\frac{1}{9}\cdot 6^3 + \frac{2}{3}\cdot 6^2 + \frac{5}{3}\cdot 6\right) - \left(-\frac{1}{9}\cdot 5^3 + \frac{2}{3}\cdot 5^2 + \frac{5}{3}\cdot 5\right)$

$= 10 - \left(\frac{100}{9}\right) = -\frac{10}{9}$

Wegen der Nichtnegativitätsbedingung für Flächen gilt: $\underline{\underline{A_2 = \frac{10}{9}\ FE}}$

$A_{ges} = A_1 + A_2 = 12 + \frac{10}{9} = \underline{\underline{\frac{118}{9}\ (FE)}}$

13 d) *Nullstellenuntersuchung:*

$$0 = \frac{2}{x^2} \quad | \cdot x^2$$

$$0 = 2 \quad ↯$$

$\Rightarrow$ Die Funktion besitzt keine Nullstellen

$$f(x) = \frac{2}{x^2} = 2 \cdot x^{-2}$$

$$A = \int_{1}^{5} (2 \cdot x^{-2})\, dx = \left[-2 \cdot x^{-1}\right]_{1}^{5} = (-2 \cdot 5^{-1}) - (-2 \cdot 1^{-1})$$

$$= \left(-\frac{2}{5}\right) - (-2) = \frac{8}{5} = \underline{\underline{1{,}6\,(FE)}}$$

---

14 b) *Nullstellenuntersuchung:*

$$0 = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 2$$

$$\boxed{\text{substituiere: } x^4 = z^2,\quad x^2 = z}$$

$$0 = \frac{1}{2}z^2 - \frac{5}{2}z + 2 \quad | \cdot 2$$

$$0 = z^2 - 5z + 4$$

$$z_{1/2} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4}$$

$$z_{1/2} = 2{,}5 \pm 1{,}5$$

$$z_1 = 4$$

$$z_2 = 1$$

resubstituiere mit $\boxed{x^2 = z}$

für $z_1 = 4$

$$x^2 = 4 \quad |\sqrt{\ }$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

für $z_2 = 1$

$$x^2 = 1 \quad |\sqrt{\ }$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = -1$$

$$\boxed{A_{ges} = A_1 + A_2}$$

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 2\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x\right]_{-2}^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{10}\cdot(-1)^5 - \frac{5}{6}\cdot(-1)^3 + 2\cdot(-1)\right) - \left(\frac{1}{10}\cdot(-2)^5 - \frac{5}{6}\cdot(-2)^3 + 2\cdot(-2)\right)$$

$$= \left(-\frac{19}{15}\right) - \left(-\frac{8}{15}\right) = -\frac{11}{15}$$

Wegen der Nichtnegativitätsbedingung für Flächen gilt: $\underline{\underline{A_1 = \frac{11}{15}\,FE}}$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 2\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{10}\cdot 1^5 - \frac{5}{6}\cdot 1^3 + 2\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{10}\cdot(-1)^5 - \frac{5}{6}\cdot(-1)^3 + 2\cdot(-1)\right)$$

$$= \frac{19}{15} - \left(-\frac{19}{15}\right) = \underline{\underline{\frac{38}{15}\,(FE)}}$$

$$A_{ges} = A_1 + A_2 = \frac{11}{15} + \frac{38}{15} = \underline{\underline{\frac{49}{15}\,(FE)}}$$

(15) b) Nullstellenuntersuchung:

$0 = (x+2)\cdot(x-1)^2$

$0 = (x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-1)$

- Da Funktion in Linearfaktorschreibweise notiert ist, kann man ablesen:

$x_1 = -2$

$x_2 = 1$, $x_3 = 1$ — Fällt zwar ins Intervall, muss aber nicht berücksichtigt werden, da doppelte Nullstelle! ☺

$f(x) = (x+2)\cdot(x-1)^2$

$f(x) = (x+2)\cdot(x^2-2x+1)$

$f(x) = x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2$

$f(x) = x^3-3x+2$

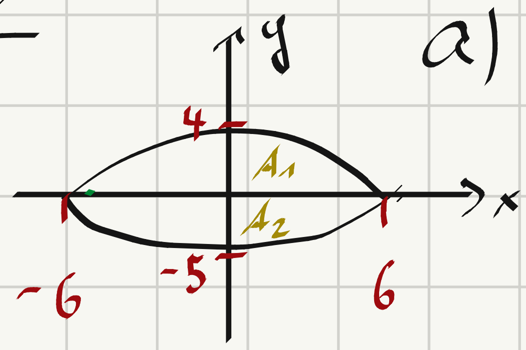
$$A = \int_{-2}^{2}(x^3-3x+2)\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4-1{,}5x^2+2x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 2^4-1{,}5\cdot 2^2+2\cdot 2\right)-\left(\tfrac{1}{4}\cdot(-2)^4-1{,}5\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)\right) \qquad 2\cdot(-2))$$

$$= 2-(-6) = 8\ \text{FE}$$

S. 65

(19)



a) • Parabel oben:

SP(0|4) N(6|0)

$|a| = \frac{\Delta y}{(\Delta x)^2} = \frac{4}{6^2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \rightarrow a = -\frac{1}{9}$

$f(x) = -\frac{1}{9}\cdot(x-0)^2+4$

$\boxed{f(x) = -\frac{1}{9}x^2+4}$

Schnelle Variante zu Rekonstruktion

Parabel unten:

SP(0|-5) N(6|0)

ausführliche Alternative (vielleicht leichter)

$\boxed{f(x) = a\cdot(x-u)^2+v}$

$f(x) = a\cdot(x-0)^2-5$

$f(x) = a x^2-5$

mit N(6|0): $0 = a\cdot 6^2-5 \quad |+5$

$5 = 36a \quad |:36$

$\frac{5}{36} = a$

$\boxed{f(x) = \frac{5}{36}x^2-5}$

b) $A_1 = \int_{-6}^{6}\left(-\frac{1}{9}x^2+4\right)dx = \left[-\frac{1}{27}x^3+4x\right]_{-6}^{6}$

$= \left(-\frac{1}{27}\cdot 6^3+4\cdot 6\right)-\left(-\frac{1}{27}\cdot(-6)^3+4\cdot(-6)\right)$

$= 32\,(m^2)$

$A_2 = \int_{-6}^{6}\left(\frac{5}{36}x^2-5\right)dx = \left[\frac{5}{108}\cdot x^3-5x\right]_{-6}^{6}$

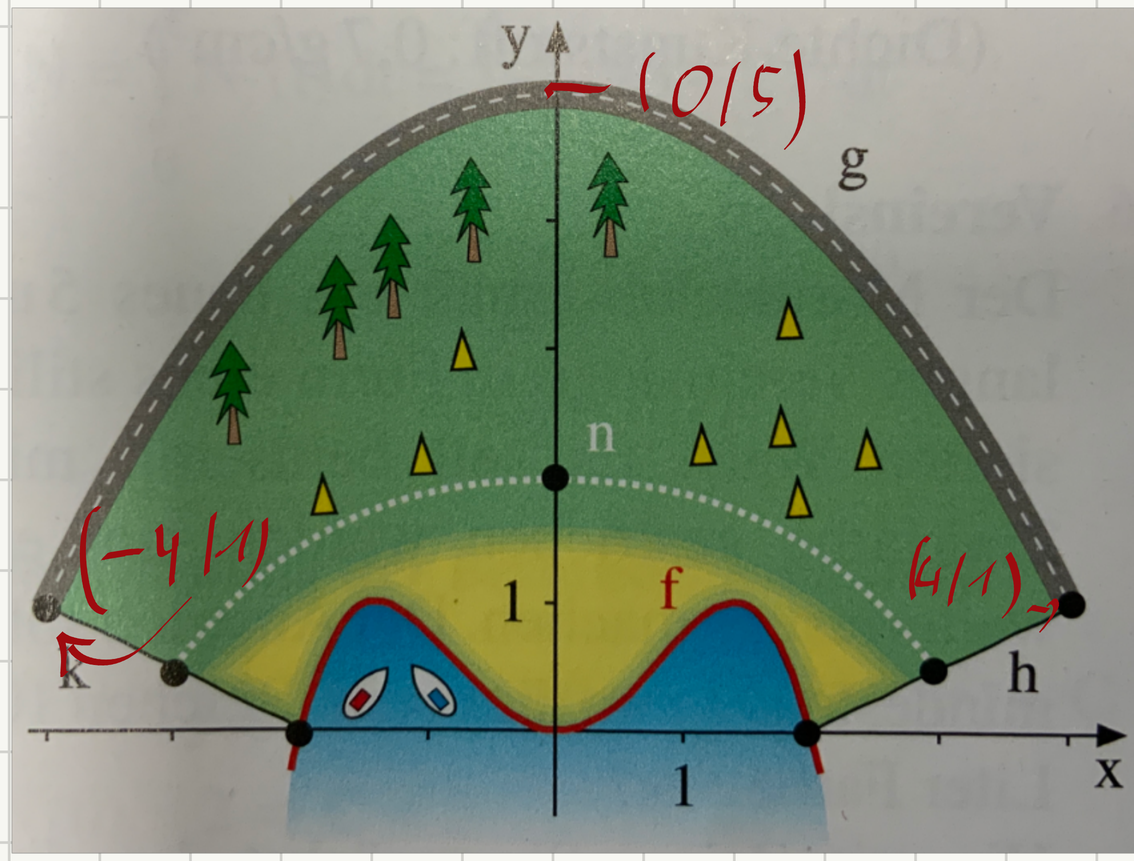
$= \left(\frac{5}{108}\cdot 6^3-5\cdot 6\right)-\left(\frac{5}{108}\cdot(-6)^3-5\cdot(-6)\right)$

$= -40$

- Wegen der Nichtnegativitätsbed. für Flächen gilt: $A_2 = 40\,(m^2)$

$A_{ges} = A_1 + A_2 = 32 + 40 = 72\,(m^2)$

(22) a)



Parabel g:

$$\boxed{f(x) = a\cdot(x-u)^2 + v}$$
$$f(x) = a\cdot(x-0)^2 + 5$$
$$f(x) = ax^2 + 5$$

mit P(4|1)
$$1 = a\cdot 4^2 + 5$$
$$1 = 16a + 5 \quad |-5$$
$$-4 = 16a \quad |:16$$
$$-0{,}25 = a$$

$$\boxed{g(x) = -0{,}25x^2 + 5}$$

Geraden:

k: $P_1(-2|0)$, $P_2(-4|1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{-4-(-2)} = -0{,}5$$
$$\boxed{g(x) = m\cdot x + b}$$
$$0 = -0{,}5\cdot(-2) + b$$
$$0 = 1 + b \quad |-1$$
$$-1 = b$$
$$k(x) = -0{,}5x - 1$$

h: $P_1(2|0)$, $P_2(4|1)$

$$m = \frac{1-0}{4-2} = \frac{1}{2}$$
$$\boxed{g(x) = m\cdot x + b}$$
$$0 = 0{,}5\cdot 2 + b$$
$$0 = 1 + b \quad |-1$$
$$-1 = b$$
$$h(x) = 0{,}5x - 1$$

b) Plan: 1) Fläche unter der Parabel − Wasserflächen − Dreiecke unter Geraden

• Fläche unter Parabel

$$A_1 = \int_{-4}^{4} (-0{,}25x^2 + 5)\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{12}x^3 + 5x\right]_{-4}^{4}$$
$$= \left(-\frac{1}{12}\cdot 4^3 + 5\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{12}\cdot(-4)^3 + 5\cdot(-4)\right)$$
$$= \frac{88}{3}\text{ FE}$$

Wasserfläche:

$$A = \int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^2\right)dx$$
$$= \left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$= \left(-\frac{1}{20}\cdot 2^5 + \frac{1}{3}\cdot 2^3\right) - (0)$$
$$= \frac{16}{15}\text{ LE}$$

• verdoppeln: $A_2 = \frac{32}{15}$ FE

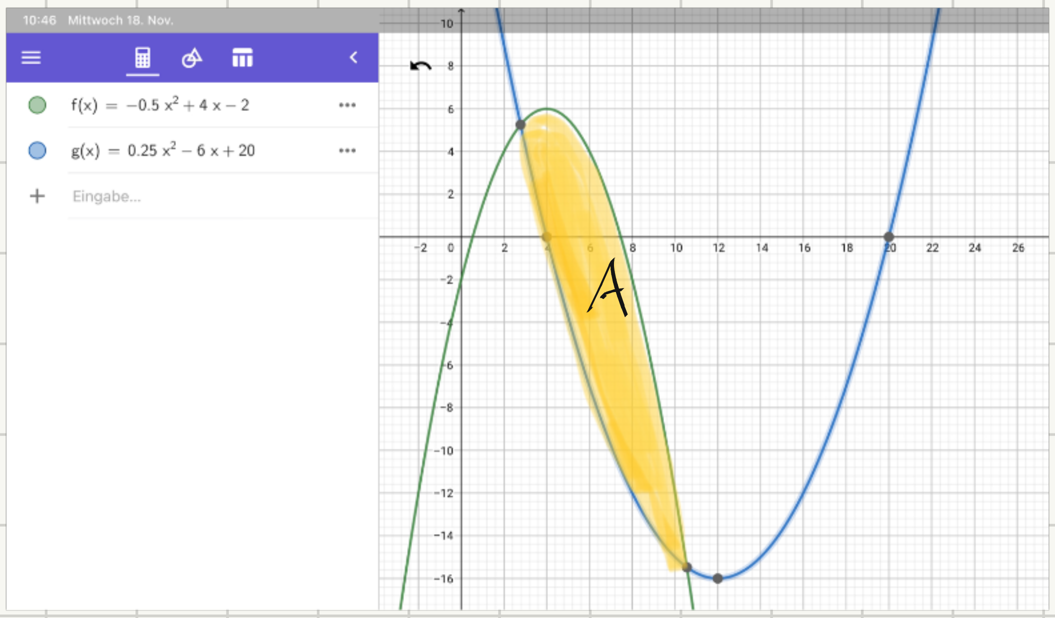
Dreiecke unter Geraden:

$$A = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1\text{ FE}$$

2 Dreiecke: $A_3 = 2$ FE

$$A_{ges} = A_1 - A_2 - A_3$$
$$= \frac{88}{3} - \frac{32}{15} - 2$$
$$= \frac{314}{15}\text{ FE} \mathrel{\hat=} 209.333{,}33\text{ m}^2$$

$1\text{ LE} \mathrel{\hat=} 100\text{ m} \Rightarrow 1\text{ FE} \mathrel{\hat=} 10\,000\text{ m}^2$



$$-0{,}5x^2 + 4x - 2 = 0{,}25x^2 - 6x + 20 \quad | +0{,}5x^2$$
$$4x - 2 = 0{,}75x^2 - 6x + 20 \quad | -4x$$
$$-2 = 0{,}75x^2 - 10x + 20 \quad | +2$$
$$0 = 0{,}75x^2 - 10x + 22 \quad | :0{,}75$$
$$0 = x^2 - \frac{40}{3}x + \frac{88}{3}$$
$$x_{1,2} = \frac{20}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 - \frac{88}{3}}$$
$$x_{1,2} \approx \frac{20}{3} \pm 3{,}89$$
$$x_1 \approx 10{,}56$$
$$x_2 \approx 2{,}78$$

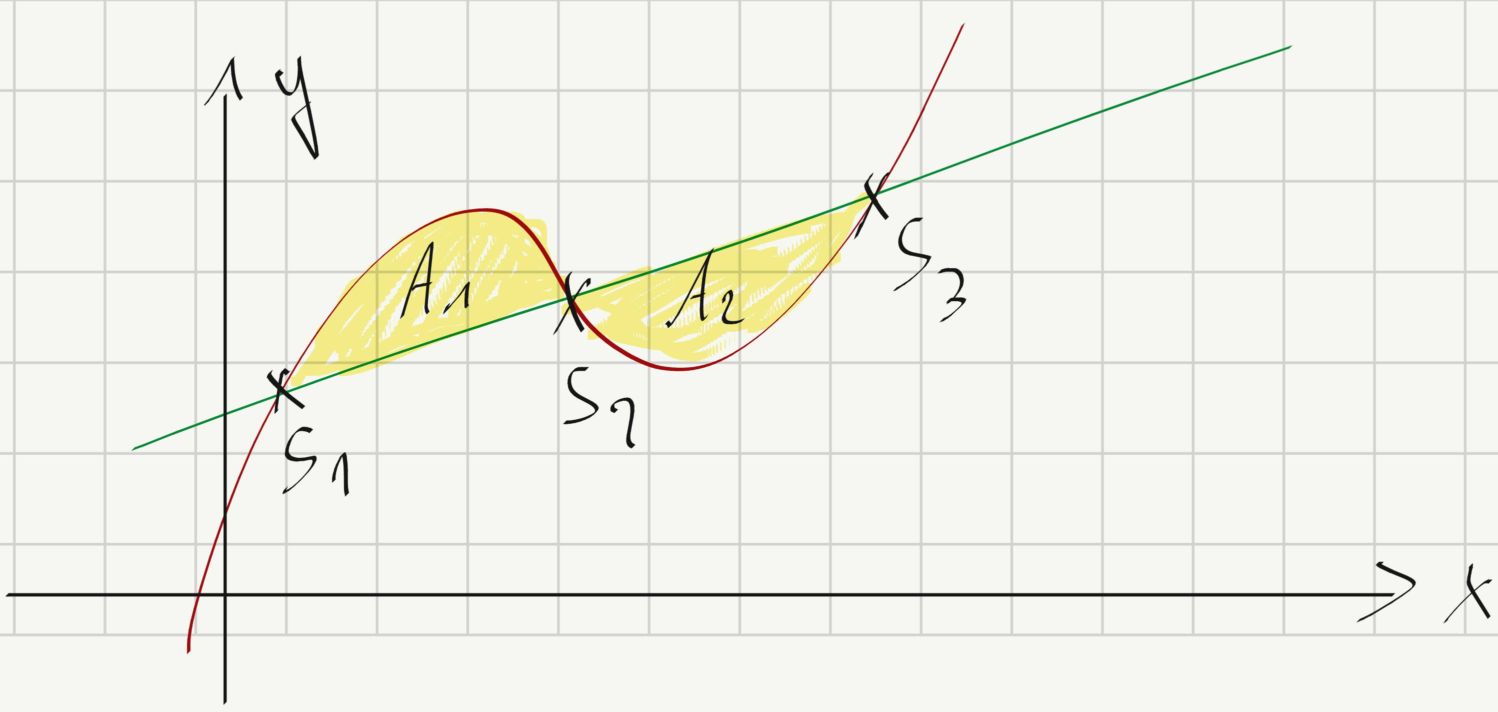
$$f_{dif}(x) = g(x) - f(x)$$
$$f_{dif}(x) = (0{,}25x^2 - 6x + 20) - (-0{,}5x^2 + 4x - 2)$$
$$f_{dif}(x) = 0{,}25x^2 - 6x + 20 + 0{,}5x^2 - 4x + 2$$
$$f_{dif}(x) = 0{,}75x^2 - 10x + 22$$

$$A = \int_{2,78}^{10,56} [f_{dif}(x)]\,dx = \int_{2,78}^{10,56} (0{,}75x^2 - 10x + 22)\,dx = \Big[0{,}25\cdot x^3 - 5x^2 + 22x\Big]_{2,78}^{10,56}$$

$$= (0{,}25\cdot 10{,}56^3 - 5\cdot 10{,}56^2 + 22\cdot 10{,}56) - (0{,}25\cdot 2{,}78^3 - 5\cdot 2{,}78^2 + 22\cdot 2{,}78)$$

$$\approx -58{,}74$$

- Wegen der Nichtnegativitätsbedingung für Flächen gilt: $\underline{A = 58{,}74 \text{ FE}}$



S. 66

(23) a) f: SP(0|4) $\Rightarrow b=4$ $\quad |a| = \frac{\Delta y}{(\Delta x)^2} = \frac{2}{4^2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ $\quad a = -\frac{1}{8}$

P(4|2)

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 4}$$

g: Infos:

$g(x) = ux^4 + vx^2 \qquad g'(x) = 4ux^3 + 2vx$

$g(4) = 2$

$g'(4) = 0$

$$\left|\begin{array}{l} 2 = u\cdot 4^4 + v\cdot 4^2 \\ 0 = 4\cdot u\cdot 4^3 + 2\cdot v\cdot 4 \end{array}\right|$$

$$\ominus\left|\begin{array}{l} 2 = 256u + 16v \\ 0 = 256u + 8v \end{array}\right|$$

$2 = 0 + 8v \quad |:8$

$\frac{1}{4} = v$

mit $0 = 256u + 8v$ und $v = \frac{1}{4}$

$0 = 256u + 8\cdot\frac{1}{4}$

$0 = 256u + 2 \quad |-2$

$-2 = 256u \quad |:256$

$-\frac{1}{128} = u$

$$\boxed{g(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{4}x^2}$$

b) Schnittpunkte durch Informationen in der Aufg. (Grafik) bekannt. Berechnung nicht nötig:

$S_1(4|2)$

$S_2(-4|2)$

$f_{dif}(x) = g(x) - f(x)$

$f_{dif}(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \left(-\frac{1}{8}x^2 + 4\right)$

$f_{dif}(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^2 - 4$

$f_{dif}(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{3}{8}x^2 - 4$

$$A = \int_{-4}^{4}\left(-\frac{1}{128}x^4 + \frac{3}{8}x^2 - 4\right)dx = \left[-\frac{1}{640}x^5 + \frac{1}{8}x^3 - 4x\right]_{-4}^{4}$$

$$= \left(-\frac{1}{640}\cdot 4^5 + \frac{1}{8}\cdot 4^3 - 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{640}\cdot(-4)^5 + \frac{1}{8}\cdot(-4)^3 - 4\cdot(-4)\right)$$

$$= -\frac{96}{5}$$

Wegen der Nichtnegativitätsbedingung für Flächen gilt: $A = \frac{96}{5}\,(m^2)$

$V = A\cdot h = \frac{96}{5}\cdot 1{,}5 = 28{,}8\,(m^3) \;\hat{=}\; 28.800\,\ell$

Antwort: ....

c) • Steigung bei $g(x)$ im Punkt $P(4|2)$ $m=0$
(weil "... horizontal ...").

• Steigung von $f(x)$ im Punkt $P(4|2)$

$f'(x) = -\frac{1}{4}x$

$f'(4) = -\frac{1}{4}\cdot 4$

$f'(4) = -1$ $\boxed{m = -1}$

Steigungswinkel: $m = \tan(\alpha)$

$-1 = \tan(\alpha) \quad | \tan^{-1}$

$-45^\circ = \alpha$

Antwort: Die beiden Kurven schneiden sich in einem 45°-Winkel.

Übung 1 **Großstadt**
Eine Stadt hat zu Beginn eines Planungszeitraumes 2 Millionen Einwohner. Ein Prognoseinstitut geht davon aus, dass die Änderungsrate der Einwohnerzahl N in den nächsten 20 Jahren durch die lineare Funktion $N'(t) = 0{,}002\,t + 0{,}05$ modelliert werden kann. Wie lautet die Gleichung von N? Wie viele Einwohner gewinnt die Stadt in dem 20-Jahres-Zeitraum hinzu?

c) Wann existierten ca. 6000 Schlangen?

Lösung zu a:
Die Änderungsrate N′ ist gegeben. Den Zuwachs ΔN erhalten wir, indem wir die Änderungsrate über das Intervall [0; 20] integrieren, d. h. „aufsummieren".

Der Zuwachs ΔN entspricht nämlich der „orientierten" Fläche unter der Funktion der Änderungsrate N′ im Intervall [0; 20].

Wir erhalten ΔN = 2, d. h., es sind 2000 Schlangen hinzugekommen.

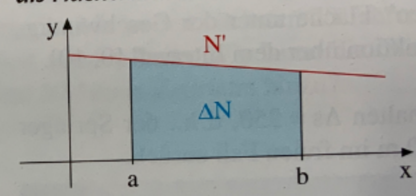
Lösung zu b:
Die Funktion der Änderungsrate N′ ist gegeben. Wir bestimmen N als Stammfunktion: $N(t) = \frac{1}{30}(23t - t^2) + C$.

Die Konstante C ergibt sich aus der *Anfangsbedingung* N(0) = 2, d. h. C = 2.

Damit lautet die endgültige Bestandsfunktion $N(t) = \frac{1}{30}(23t - t^2) + 2$.

Gleichung der Änderungsrate N′:
$N'(t) = \frac{1}{30}(23 - 2t)$ ✓

Anschauliche Bedeutung des Zuwachses ΔN als Flächeninhalt:



Bestimmung des Zuwachses ΔN:

$$\Delta N = \int_0^{20} N'(t)\,dt = \int_0^{20} \frac{1}{30}(23 - 2t)\,dt$$
$$= \left[\frac{1}{30}(23t - t^2)\right]_0^{20}$$
$$= (2) - (0) = 2$$

Bestimmung der Bestandsfunktion N:

$$N(t) = \int \frac{1}{30}(23 - 2t)\,dt = \frac{1}{30}(23t - t^2) + C$$
$$N(0) = 2 \Rightarrow C = 2$$
$$\Rightarrow N(t) = \frac{1}{30}(23t - t^2) + 2$$

Gleichung der Änderungsrate N′

$$N'(t) = 0{,}002 \cdot t + 0{,}05$$

Bestimmung des Zuwachses ΔN:

$$\Delta N = \int_0^{20} (0{,}002 \cdot t + 0{,}05)\,dt$$

$$= \left[0{,}001 \cdot t^2 + 0{,}05 t\right]_0^{20} = (0{,}001 \cdot 20^2 + 0{,}05 \cdot 20) - (0{,}001 \cdot 0^2 + 0{,}05 \cdot 0)$$

$$= 1{,}4 - 0 = 1{,}4 = C$$

Bestimmung der Bestandsfunkt. N:

$$N(t) = \int (0{,}002t + 0{,}05)\,dt = \left[0{,}001 \cdot t^2 + 0{,}05t + C\right]$$

$$\boxed{N(t) = 0{,}001 \cdot t^2 + 0{,}05t + 1{,}4}$$

S. 76 (8)

1 Minute ≙ 60 Sekunden ⇒ I = [0; 60]

$$\boxed{v(t) = -0{,}012t^2 + 7{,}2t}$$

$$\Delta m = \int_0^{60} (-0{,}012t^2 + 7{,}2t)\,dt = \left[-0{,}004t^3 + 3{,}6t^2\right]_0^{60} = (-0{,}004 \cdot 60^3 + 3{,}6 \cdot 60^2) - (-0{,}004 \cdot 0^3 + 3{,}6 \cdot 0^2)$$

$$= 12.096$$

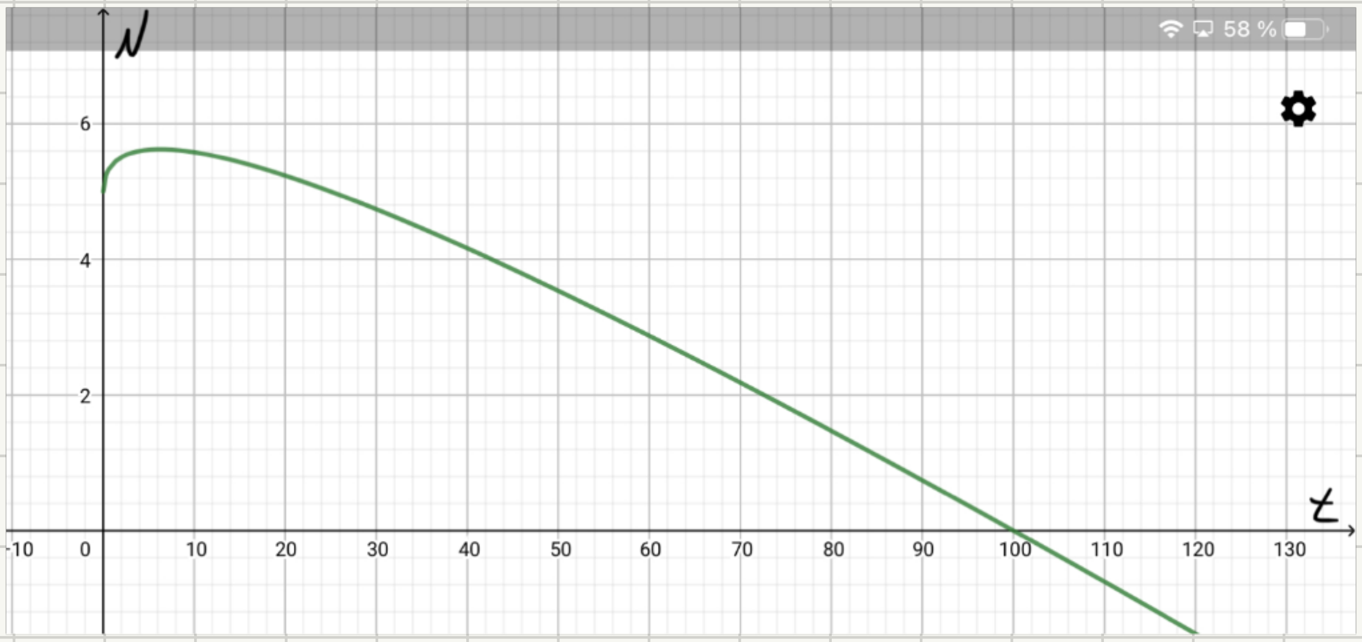
$$m(t) = \int (-0{,}012t^2 + 7{,}2t)\,dt = \left[-0{,}004t^3 + 3{,}6t^2 + c\right]$$

$$\boxed{m(t) = -0{,}004t^3 + 3{,}6t^2 + 12.096}$$

(mit "m" ≙ Strecke in Meter)

(13)

a)



b) Maximum: $N'(t) = 0$

$$N(t) = 5 + 0{,}5 \cdot t^{\frac{1}{2}} - 0{,}1 \cdot t$$

$$N'(t) = 0{,}25 \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 0{,}1$$

$$N'(t) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} - 0{,}1$$

$$N'(t) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{t}} - 0{,}1$$

$$0 = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{t}} - 0{,}1 \quad | +0{,}1$$

$$0{,}1 = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{t}} \quad | \cdot 4\sqrt{t}$$

$$0{,}4 \cdot \sqrt{t} = 1 \quad | : 0{,}4$$

$$\sqrt{t} = 2{,}5 \quad | \ (\ )^2$$

$$t = 6{,}25$$

Antwort: Am 6. Tag ist die Arbeiter-Zahl maximal.

c) 3600 Arbeiter $\hat{=}$ $N = 3{,}6$

In Aufgabe steht, dass $1N \hat{=} 1000$ Arbeiter

$$3{,}6 = 5 + 0{,}5 \cdot \sqrt{t} - 0{,}1t \quad | -0{,}5\sqrt{t}$$

$$3{,}6 - 0{,}5\sqrt{t} = 5 - 0{,}1t \quad | -3{,}6$$

$$-0{,}5\sqrt{t} = \frac{7}{5} - 0{,}1t \quad | (...)^2$$

$$(-0{,}5 \cdot \sqrt{t})^2 = \left(\frac{7}{5} - 0{,}1t\right)^2$$

kein Binom 🙂 — Binom!

$$(-0{,}5)^2 \cdot (\sqrt{t})^2 = \frac{49}{25} - \frac{7}{25}t + 0{,}01t^2$$

$$\frac{1}{4} \cdot t = 0{,}01t^2 - \frac{7}{25}t + \frac{49}{25} \quad | -\frac{1}{4}t$$

$$0 = 0{,}01t^2 - \frac{53}{100}t + \frac{49}{25} \quad | : 0{,}01$$

$$0 = t^2 - 53t + 196$$

$$t_{1/2} = 26{,}5 \pm \sqrt{702{,}25 - 196}$$

$$\frac{49}{25} - \frac{7}{25}t + 0{,}01t^2$$

$$t_{1/2} = 26{,}5 \pm 22{,}5$$

$$t_1 = 4$$

$$t_2 = 49$$

Aber beachte:

Das Potenzieren aus Schritt 2 ist i. Allg. keine Äquivalenzumformung: Durch das Potenzieren können Lösungen (sog. Scheinlösungen) hinzukommen, es gehen aber keine verloren.

Um Scheinlösungen auszusortieren, machen wir die Probe, d. h., wir setzen die möglichen Lösungen in die Ausgangsgleichung ein. Nur die Lösungen, die zu einer wahren Aussage führen, gehören auch wirklich zur Lösung der Wurzelgleichung.

daher: $\boxed{\text{Probe}}$

für $t_1 = 4$:

$$3{,}6 = 5 + 0{,}5 \cdot \sqrt{4} - 0{,}1 \cdot 4$$

$$3{,}6 = 5{,}6 \quad ↯$$

$\Rightarrow$ $t = 4$ ist eine Scheinlösung!

für $t_2 = 49$:

$$3{,}6 = 5 + 0{,}5 \cdot \sqrt{49} - 0{,}1 \cdot 49$$

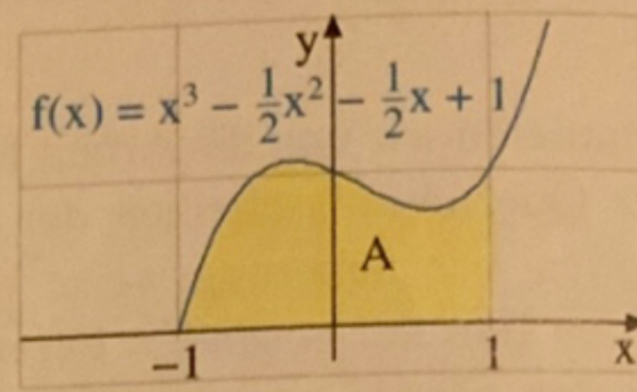
$$3{,}6 = 3{,}6 \quad ✓$$

$$\Rightarrow t = 49$$

Test

Anwendungen der Integralrechnung

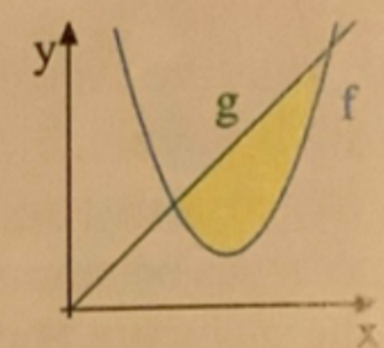
1. Fläche unter Kurven



a) Gesucht ist der Inhalt des rechts abgebildeten markierten Flächenstücks A.

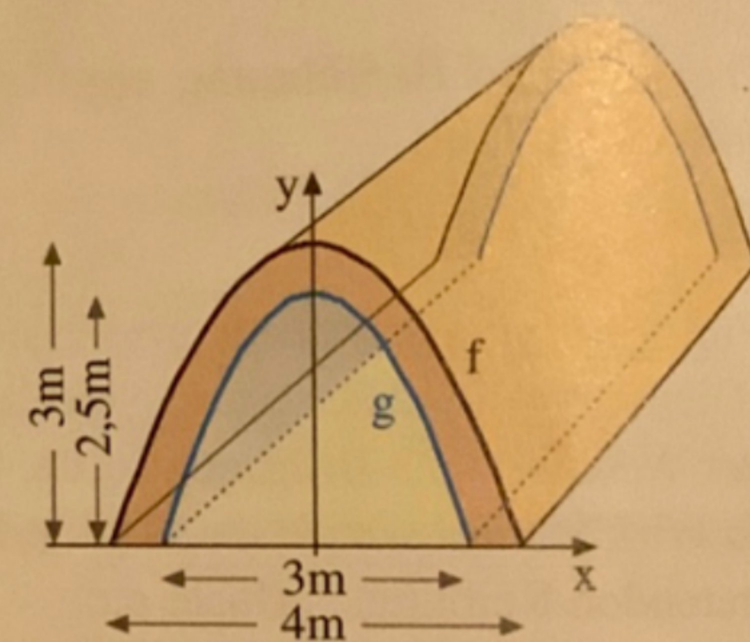
b) Wie groß ist der Inhalt der Fläche A, die vom Graphen der Funktion $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ und der x-Achse umschlossen wird?

2. Flächen zwischen Kurven



Der Graph von $f(x) = x^2 - 6x + 10$ und die Gerade $g(x) = x$ beranden gemeinsam ein Flächenstück A. Bestimmen Sie die Schnittpunkte von f und g. Fertigen Sie dann eine Skizze an. Berechnen Sie anschließend den Inhalt von A.

3. Tunnel



Ein 10 m langer Fußgängertunnel aus Beton hat die eingezeichneten Maße. Die innere Berandungsparabel hat die Gleichung $g(x) = -\frac{10}{9}x^2 + \frac{5}{2}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der äußeren Berandungsparabel f.

b) Wie viel m^3 Beton werden für den Bau des Tunnels benötigt?

4. Wolfspopulation

Ein Rudel Wölfe hat sein Revier auf einer abgelegenen Halbinsel in Alaska gefunden. Die Wolfspopulation vermehrt sich nun mit der Wachstumsgeschwindigkeit $w'(t) = -0{,}024t^2 + 0{,}12t + 9{,}8$.
t: Zeit in Jahren; $w'(t)$: Wachstumsgeschwindigkeit der Population zur Zeit t in Wölfen/Jahr.

a) Wie viele Wölfe kommen in den ersten zehn Jahren hinzu?

b) Nach 20 Jahren besteht die Population aus 172 Wölfen. Wieviele Tiere waren es zu Beginn?

5. Rekonstruktion einer Bestandsfunktion

Ein Heißluftballon befindet sich in 2000 m Höhe, als der Pilot die Landung einleitet. Die Sinkgeschwindigkeit kann durch die Funktion $v(t) = 0{,}0015t^2 - 0{,}3t$ erfasst werden.
t: Zeit in Sekunden; $v(t)$: Geschwindigkeit in m/s.

a) Wie lautet die Gleichung der Funktion $h(t)$, welche die Höhe des Ballons beschreibt?

b) In welcher Höhe ist der Ballon nach zwei Minuten? Wie schnell sinkt er dann?

c) Die Landung erfolgt weich, d. h. die Sinkgeschwindigkeit ist dann gleich null. Nach welcher Zeit und in welcher Höhe erfolgt die Landung?

Lösungen Test S. 82:

(1) a)

$$A = \int_{-1}^{1} (x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x + 1)^2\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 1^4 - \tfrac{1}{6}\cdot 1^3 - \tfrac{1}{4}\cdot 1^2 + 1\right) - \left(\tfrac{1}{4}(-1)^4 - \tfrac{1}{6}(-1)^3 - \tfrac{1}{4}(-1)^2 + (-1)\right)$$

$$= \tfrac{5}{3}\ (FE)$$

b) **Nullstellenuntersuchung:**

$0 = -x^2 + 4x - 3 \quad | : (-1)$

$0 = x^2 - 4x + 3$

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3}$

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

Flächenberechnung:

$$A = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x\right]_1^3$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3}\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3\right) - \left(-\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 + 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1\right) = \underline{\underline{\tfrac{4}{3}\ (FE)}}$$

---

(2) **Schnittpunktbestimmung:**

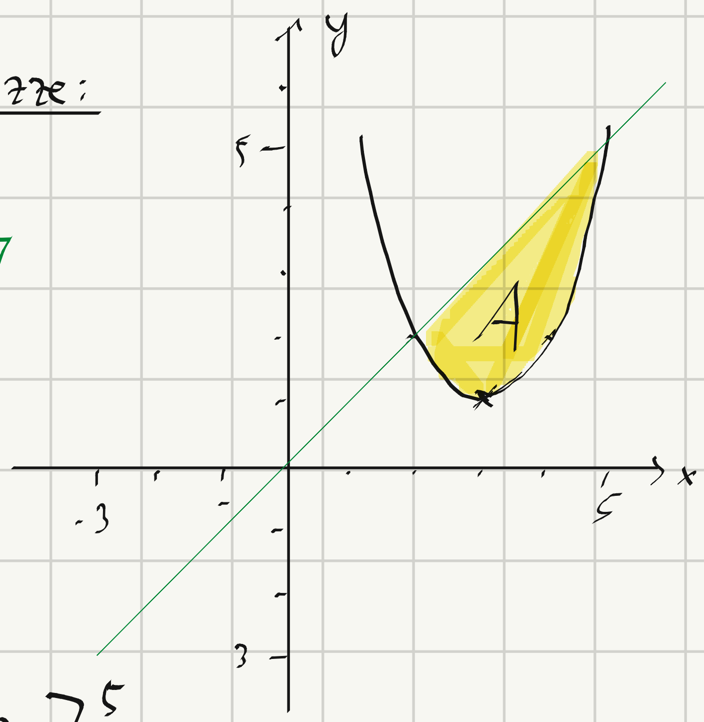
$x = x^2 - 6x + 10 \quad | -x$

$0 = x^2 - 7x + 10 \quad [\hat{=}\ f_{dif}(x)]$

mit WTR: $\underline{x_1 = 5}$ $\underline{x_2 = 2}$

$$\boxed{f_{dif}(x) = x^2 - 7x + 10}$$

Skizze:



$$A = \int_2^5 (x^2 - 7x + 10)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - 3{,}5x^2 + 10x\right]_2^5$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}\cdot 5^3 - 3{,}5\cdot 5^2 + 10\cdot 5\right) - \left(\tfrac{1}{3}\cdot 2^3 - 3{,}5\cdot 2^2 + 10\cdot 2\right) = -\tfrac{9}{2}$$

- Wegen der Nichtnegativitätsbedingung für Flächen gilt: $\underline{A = 4{,}5\ FE}$

---

(3) a) **Bestimmen der äußeren Parabel:**

$SP(0|3)$

$N(2|0)$

$|a| = \frac{\Delta y}{(\Delta x)^2} = \frac{3}{2^2} = 0{,}75$

$a = -0{,}75$

$f(x) = -0{,}75\cdot(x-0)^2 + 3$

$\underline{f(x) = -0{,}75x^2 + 3}$

b) $A_f = \int_{-2}^{2} (-0{,}75x^2 + 3)\,dx = \left[-0{,}25x^3 + 3x\right]_{-2}^{2} = (-0{,}25 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2) - (-0{,}25 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2))$

$= 8\ (m^2)$

$A_g = \int_{-1{,}5}^{1{,}5} (-\frac{10}{9}x^2 + 2{,}5)\,dx = \left[-\frac{10}{27}x^3 + 2{,}5x\right]_{-1{,}5}^{1{,}5} = (-\frac{10}{27} \cdot 1{,}5^3 + 2{,}5 \cdot 1{,}5) - (-\frac{10}{27} \cdot (-1{,}5)^3 + 2{,}5 \cdot (-1{,}5))$

$= 5\ (m^2)$

$A = A_f - A_g = 8m^2 - 5m^2 = 3m^2$

Länge Tunnel

$V = A \cdot \underbrace{10m}_{\text{Länge Tunnel}} = 3m^2 \cdot 10m = \underline{\underline{30m^3}}$

4

a) Berechnung des Zuwachses in den ersten 10 Jahren

$\Delta W = \int_{0}^{10} (-0{,}024t^2 + 0{,}12t + 9{,}8)\,dt = \left[-\frac{1}{125}t^3 + \frac{3}{50}t^2 + 9{,}8t\right]_0^{10}$

$= (-\frac{1}{125} \cdot 10^3 + \frac{3}{50} \cdot 10^2 + 9{,}8 \cdot 10) - 0 = \underline{\underline{96}}$

Antwort: In den ersten 10 Jahren kamen 96 Wölfe dazu.

b) $F(20) = \int_{0}^{20} (-0{,}024t^2 + 0{,}12t + 9{,}8)\,dt = \left[-\frac{1}{125}t^3 + \frac{3}{50}t^2 + 9{,}8t\right]_0^{20}$

$= (-\frac{1}{125} \cdot 20^3 + \frac{3}{50} \cdot 20^2 + 9{,}8 \cdot 20) - 0 = 156$

$\boxed{\text{Differenz zwischen "soll" und "ist": } 172 - 156 = \underline{\underline{16}}}$

Antwort: Zu Beginn der 20 Jahre waren es 16 Wölfe.

5 a) $h(t) = \int (0{,}0015t^2 - 0{,}3 \cdot t)\,dt = \left[\frac{1}{2000}t^3 - \frac{3}{20}t^2 + C \right]$

$C = 2000$ (Startwert in Aufg. gegeben)

damit: $h(t) = \frac{1}{2000}t^3 - \frac{3}{20}t^2 + 2000$

b) • Höhe nach 2 Min ≙ 120 Sek:

$h(120) = \frac{1}{2000} \cdot 120^3 - \frac{3}{20} \cdot 120^2 + 2000$

$h(120) = 704$ (m)

• Fallgeschwindigkeit zum Zeitpunkt 2 Minuten ≙ 120 Sekunden

$v(120) = 0{,}0015 \cdot 120^2 - 0{,}3 \cdot 120$

$v(120) = -14{,}4$ (m/s)

Antwort: Nach 2 Minuten ist der Ballon noch 704 Meter hoch und sinkt mit 14,4 Metern pro Sekunde.

c) Zeitpunkt der Landung ($v = 0$, da "weiche Landung"):

$0 = 0{,}0015t^2 - 0{,}3 \cdot t$

$0 = t \cdot (0{,}0015t - 0{,}3) \quad \Rightarrow t_1 = 0$

$0 = 0{,}0015t - 0{,}3 \quad | +0{,}3$

$0{,}3 = 0{,}0015t \quad | : 0{,}0015$

$200 = t$

200 Sekunden ≙ 3,33 Minuten

Höhe während der Landung:

$h(200) = \frac{1}{2000} \cdot 200^3 - \frac{3}{20} \cdot 200^2 + 2000$

$h(200) = 0$ (m)

Antwort: Der Ballon landet nach 200 Sekunden (≙ 3,33 Minuten) auf 0 Meter Höhe (also ggf. direkt am Meer).

$$f(x) = 6 \cdot e^{2x+4}$$

$$g(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x+4)^2 + 8$$
$$g(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x^2 + 8x + 16) + 8$$
$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 4 + 8$$
$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$$

Fläche unter Parabel (A_1):

$$A_1 = \int_{-8}^{-4} \left(-\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4\right) dx = \left[-\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 4x\right]_{-8}^{-4}$$

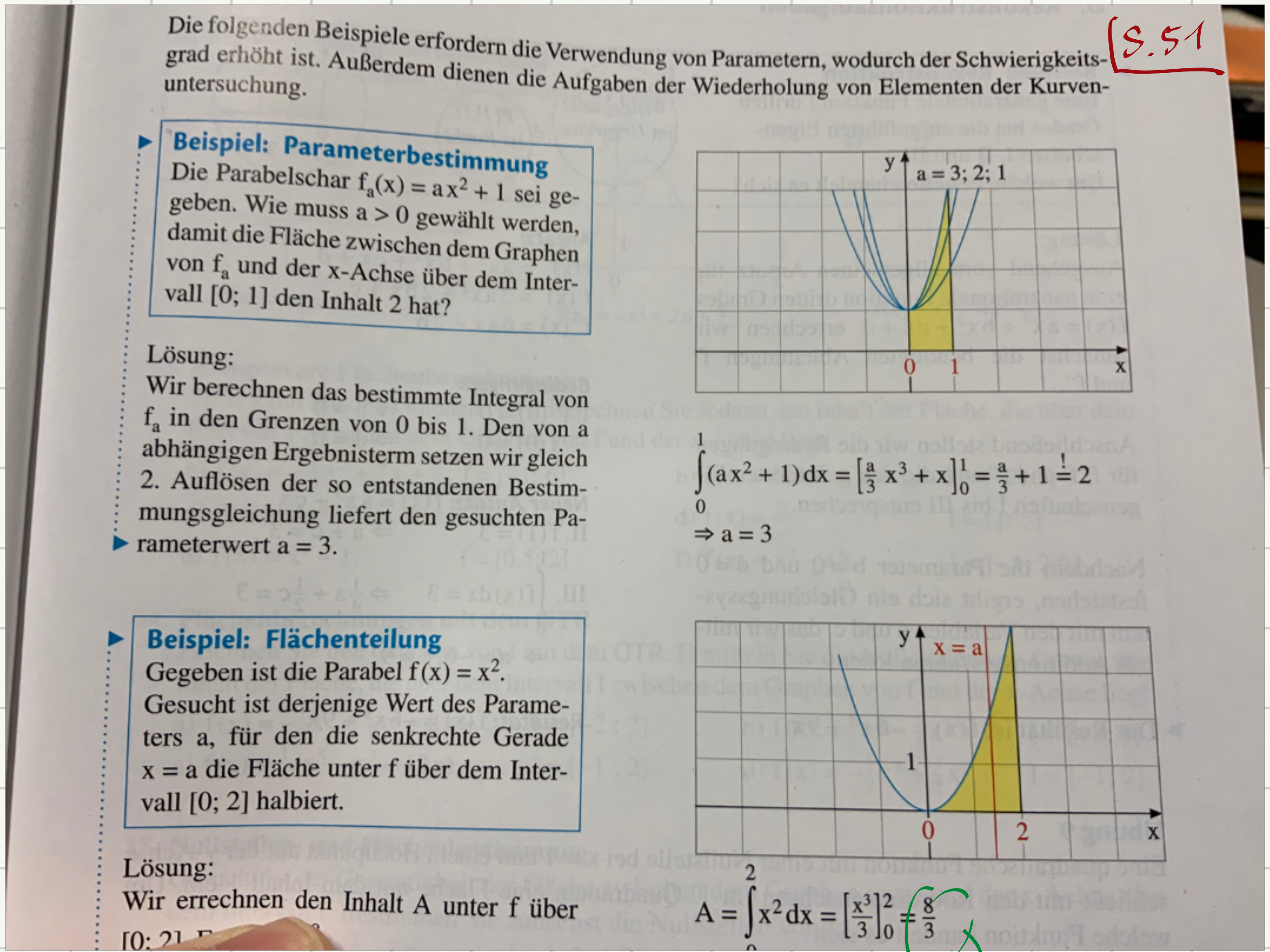
$$= \left(-\frac{1}{12} \cdot (-4)^3 - (-4)^2 + 4 \cdot (-4)\right) - \left(-\frac{1}{12} \cdot (-8)^3 - (-8)^2 + 4 \cdot (-8)\right) = \underline{\underline{\frac{80}{3} \text{ FE}}}$$

Fläche unter der e-Funktion (A_2):

$$A_2 = \int_{-8}^{-4} \left(6 \cdot e^{2x+4}\right) dx = \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot e^{2x+4}\right]_{-8}^{-4} = \left[3 \cdot e^{2x+4}\right]_{-8}^{-4}$$

$$= \left(3 \cdot e^{2 \cdot (-4) + 4}\right) - \left(3 \cdot e^{2 \cdot (-8) + 4}\right) \approx 0{,}055 \text{ FE}$$

$$\boxed{A_{ges} = A_1 - A_2 = \frac{80}{3} - 0{,}055 \approx 26{,}61 \text{ FE}}$$


S.51

Die folgenden Beispiele erfordern die Verwendung von Parametern, wodurch der Schwierigkeitsgrad erhöht ist. Außerdem dienen die Aufgaben der Wiederholung von Elementen der Kurvenuntersuchung.

Beispiel: Parameterbestimmung

Die Parabelschar $f_a(x) = ax^2 + 1$ sei gegeben. Wie muss $a > 0$ gewählt werden, damit die Fläche zwischen dem Graphen von f_a und der x-Achse über dem Intervall $[0; 1]$ den Inhalt 2 hat?

Lösung:
Wir berechnen das bestimmte Integral von f_a in den Grenzen von 0 bis 1. Den von a abhängigen Ergebnisterm setzen wir gleich 2. Auflösen der so entstandenen Bestimmungsgleichung liefert den gesuchten Parameterwert $a = 3$.

$$\int_0^1 (ax^2 + 1)\,dx = \left[\tfrac{a}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \tfrac{a}{3} + 1 \overset{!}{=} 2$$
$$\Rightarrow a = 3$$

Beispiel: Flächenteilung

Gegeben ist die Parabel $f(x) = x^2$. Gesucht ist derjenige Wert des Parameters a, für den die senkrechte Gerade $x = a$ die Fläche unter f über dem Intervall $[0; 2]$ halbiert.

Lösung:
Wir errechnen den Inhalt A unter f über
[0; 2] …

$$A = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = \tfrac{8}{3}$$

d.h.: Zielflächenwert

$A = \frac{4}{3}$

$$\boxed{A = \int_a^b (f(x))\,dx}$$

$$\frac{4}{3} = \int_0^g (x^2)\,dx$$

$$\frac{4}{3} = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^g$$

$$\frac{4}{3} = \left(\frac{1}{3}\cdot g^3\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3}\cdot g^3 \qquad \Big| :\frac{1}{3}$$

$$4 = g^3 \qquad \Big| \sqrt[3]{}$$

$$1{,}59 \approx g$$

$$A = \int_0^1 (ax^2 + 1)\,dx$$

Zielflächenwert: $A = 2$

$$2 = \int_0^1 (a\cdot x^2 + 1)\,dx$$

$$2 = \left[\frac{1}{3}a\cdot x^3 + x\right]_0^1$$

$$2 = \left(\frac{1}{3}\cdot a\cdot 1^3 + 1\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot a\cdot 0^3 + 0\right)$$

$$2 = \frac{1}{3}a + 1 - 0 \qquad \Big| -1$$

$$1 = \frac{1}{3}a \qquad \Big| :\frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{3 = a}}$$

THEMEN FÜR KA2

- Einfache Flächenberechnungen (Achtung: Nullstellen im Intervall ??)
  ↳ + Sachaufgabe S. 23/24
  (+ Modellieren → Randfunkt. selber rekonstruieren S. 25)
- Parameteraufg. (ab S. 51)
- Flächen zwischen zwei Kurven $f_{dif}(x)$
- Rekonstruktion von Beständen (ab S. 67)

- Flächen bei nichtganzrationalen Funkt.: (S. 49)

"Aufleiten" von nichtganzrationalen Fkt.:

e-Funktionen:

$f(x) = 2 \cdot e^{3x}$

Vorgehen:

1) Exponentenfunkt. ableiten

$\boxed{\text{Exp-Fukt.}' = 3}$

2) f(x) komplett abschreiben

3) $\frac{1}{[\ ]}$ vor die Ausgangsfunkt.

4) In $[\ ]$ Exp-Funkt.' einsetzen

$F(x) = 2 \cdot e^{3x}$

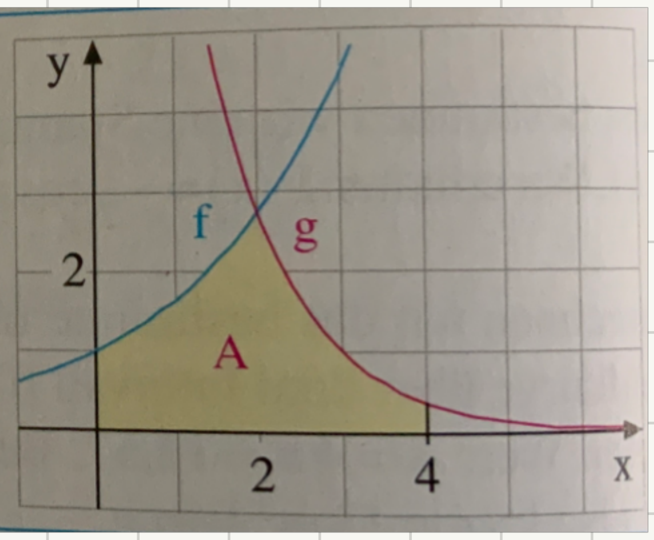
$F(x) = \frac{1}{[\ ]} 2 \cdot e^{3x}$

$F(x) = \frac{1}{3} 2 \cdot e^{3x}$

vereinfacht: $F(x) = \frac{2}{3} \cdot e^{3x}$

Übungsbeispiel:

Beispiel: Exponentialfunktionen
Die Graphen der Funktionen $f(x) = e^{0,5x}$ und $g(x) = e^{3-x}$ begrenzen mit den Koordinatenachsen über dem Intervall [0; 4] eine Fläche A. Berechnen Sie den Inhalt von A.



Verdacht: Schnittpunkt der Funktionen bei $x = 2$

$f(x) = g(x)$

$e^{0,5x} = e^{3-x} \quad | \ln$

$0,5x = 3 - x \quad | +1x$

$1,5x = 3 \quad | : 1,5$

$x = 2$

$A_{ges} = A_1 + A_2$

$A_1 = \int_0^2 (e^{0,5x})dx = \left[\frac{1}{0,5} \cdot e^{0,5x}\right]_0^2 = \left[2 \cdot e^{0,5x}\right]_0^2 = 2 \cdot e^{0,5 \cdot 2} - 2 \cdot e^{0,5 \cdot 0}$

$\approx 5,44 - 2 = 3,44 \text{ (FE)}$

$A_2 = \int_2^4 (e^{3-x})dx = \left[\frac{1}{-1} e^{3-x}\right]_2^4 = \left[-e^{3-x}\right]_2^4 = -e^{3-4} - (-e^{3-2})$

$= -e^{-1} + e^{1} \approx 2,35 \text{ (FE)}$

$A_{ges} = A_1 + A_2 = 3,44 \text{ FE} + 2,35 \text{ FE} = 5,79 \text{ FE}$

Aufleiten bei Sinus- und Cosinusfunktionen:

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\sin(x)} \arrow[dr, bend left, "f'"] & \\
\boxed{-\cos(x)} \arrow[ur, bend left, "f'"] & & \boxed{\cos(x)} \arrow[dl, bend left, "f'"] \\
 & \boxed{-\sin(x)} \arrow[ul, bend left, "f'"] &
\end{tikzcd}$$

Beispiele:

1) $f(x) = \sin(10x)$

$$F(x) = -\frac{1}{10} \cdot \cos(10x)$$

2) $f(x) = 30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$

$$F(x) = \frac{1}{0{,}25\pi} \cdot 30 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$$

$$F(x) = \frac{30}{\frac{1}{4} \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} x\right)$$

$$F(x) = \frac{120}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} x\right)$$

Weitere Übungen S. 50

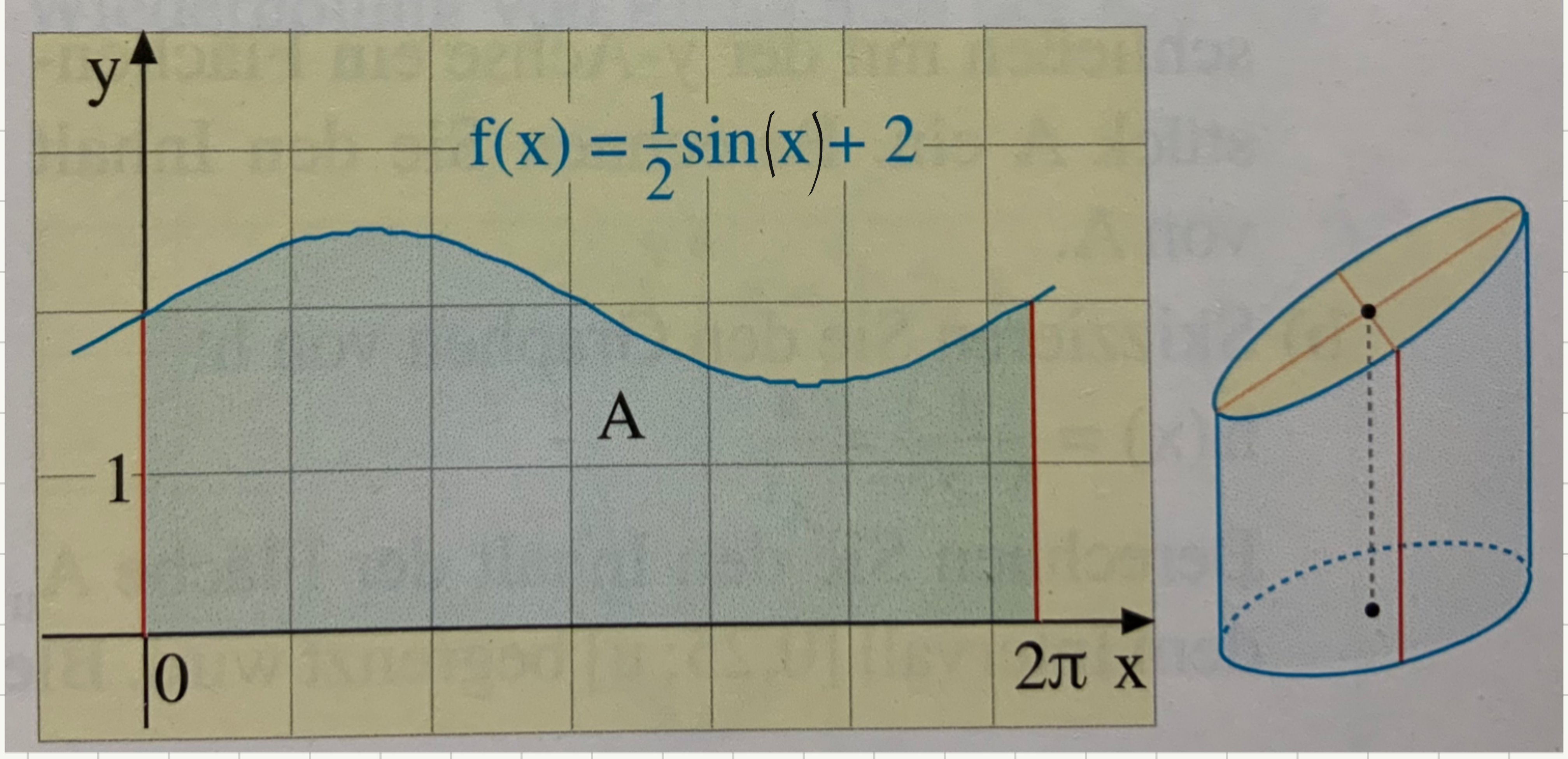
$$\frac{120 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\pi} + C$$

Bsp.: Berechnen Sie die Fläche unter der Kurve der Funktion $f(x) = 30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$ im Intervall $I = [7; 9{,}5]$

$$A = \int_7^{9{,}5} \left(30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)\right) dx = \left[\frac{120}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)\right]$$

$$= \left(\frac{120}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 9{,}5\right)\right) - \left(\frac{120}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 7\right)\right)$$

$$\approx 4{,}96 - 3{,}66 = 1{,}3 \,(FE)$$



$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(x) + 2$$

$$F(x) = -\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(x) + 2x$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(x) + 2x$$

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin(x) + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \cos(x) + 2x\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi) + 2 \cdot 2\pi\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos(0) + 2 \cdot 0\right)$$

$$\approx \quad 12{,}07 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{12{,}57}}$$

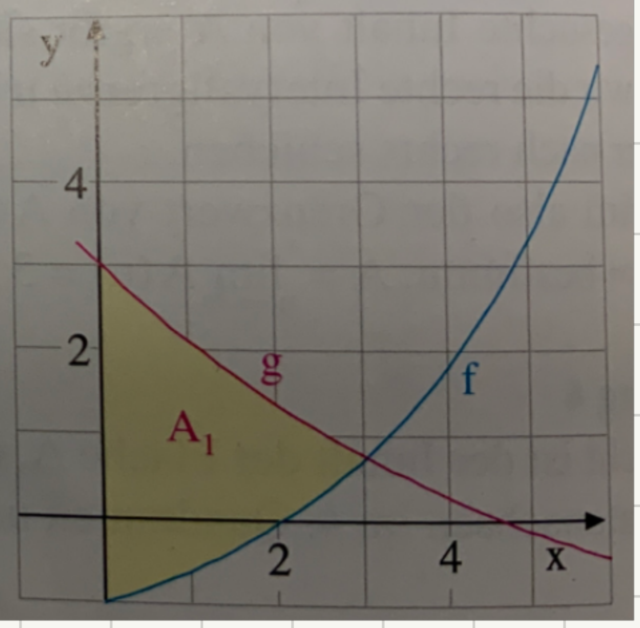
Übung 6 **Fläche zwischen zwei Graphen**

Die Graphen von $f(x) = e^{\frac{x}{3}} - 2$ und $g(x) = e^{\frac{8-x}{5}} - 2$ begrenzen mit der y-Achse ein Flächenstück A_1.

a) Berechnen Sie die Schnittstelle von f und g.

b) Berechnen Sie den Inhalt von A_1.

c) Wie groß ist der Inhalt der Fläche A_2 im 4. Quadranten, welche von den Koordinatenachsen und dem Graphen von f begrenzt wird?



a)

$$e^{\frac{x}{3}} - 2 = e^{\frac{8-x}{5}} - 2 \quad | +2$$

$$e^{\frac{x}{3}} = e^{\frac{8-x}{5}} \quad | \ln$$

$$\frac{x}{3} = \frac{8-x}{5} \quad | \cdot 15$$

$$\frac{x \cdot \cancel{15}^{5}}{\cancel{3}_{1}} = \frac{(8-x) \cdot \cancel{15}^{3}}{\cancel{5}_{1}}$$

$$5x = 3 \cdot (8-x)$$

$$5x = 24 - 3x \quad | +3x$$

$$8x = 24 \quad | :8$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

b)

$$f_{dif}(x) = g(x) - f(x) = e^{\frac{8-x}{5}} - 2 - (e^{\frac{x}{3}} - 2)$$

$$= e^{\frac{8-x}{5}} - 2 - e^{\frac{x}{3}} + 2$$

$$= e^{\frac{8-x}{5}} - e^{\frac{x}{3}}$$

$$f_{dif}(x) = e^{(\frac{8}{5} - \frac{1}{5}x)} - e^{\frac{1}{3}x}$$

Umbauidee:

- $\frac{8-x}{5} = \frac{8}{5} - \frac{x}{5} = \underline{\underline{(\frac{8}{5} - \frac{1}{5}x)}}$
- $\frac{x}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot x}}$

$$\boxed{F_{dif}(x) = \frac{1}{-\frac{1}{5}} \cdot e^{(\frac{8}{5} - \frac{1}{5}x)} - \left(\frac{1}{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{1}{3}x}\right) = -5 \cdot e^{\frac{8}{5} - \frac{1}{5}x} - 3 \cdot e^{\frac{1}{3}x}}$$

$$A_1 = \int_0^3 \left(e^{\frac{8-x}{5}} - e^{\frac{x}{3}}\right) dx = \left[-5 \cdot e^{\frac{8}{5} - \frac{1}{5}x} - 3 \cdot e^{\frac{1}{3}x}\right]_0^3$$

$$= \left(-5 \cdot e^{\frac{8}{5} - \frac{1}{5} \cdot 3} - 3 \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot 3}\right) - \left(-5 \cdot e^{\frac{8}{5} - \frac{1}{5} \cdot 0} - 3 \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot 0}\right)$$

$$= -21{,}75 - (-27{,}77) = \underline{\underline{6{,}02\ (FE)}}$$

Übungen für Klassenarbeit Nr. 2:

8

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 \qquad I = [0; 2]$

$$A = \int_0^2 \left(\frac{1}{4} \cdot x^3\right) dx = \left[\frac{1}{16} \cdot x^4\right]_0^2 = \left(\frac{1}{16} \cdot 2^4\right) - \left(\frac{1}{16} \cdot 0^4\right) = \underline{\underline{1\,(FE)}}$$

b) $$A = \int_1^2 (x^2 - 2x + 2)\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2^2 + 2 \cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1\right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}\,(FE)}}$$

9

a)

Nullstellen:

$0 = x + 3 \quad | -3$

$\underline{\underline{-3 = x}}$

$I = [0; 4]$

$$A = \int_0^4 (x+3)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_0^4$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 3 \cdot 4\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0\right)$$

$$= \underline{\underline{20\,(FE)}}$$

b)

Nullstellen:

$0 = 2x^2 + 1 \quad | -1$

$-1 = 2x^2 \quad | :2$

$-\frac{1}{2} = x^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\lightning$ n. d.

$\Rightarrow$ keine Nullstellen

$$B = \int_1^2 (2x^2 + 1)\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 + x\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 1\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{17}{3}\,(FE)}}$$

c)

Nullstellen:

$0 = (2 - x)^2$

$0 = 4 - 4x + x^2$

$0 = x^2 - 4x + 4$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4}$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{0}$

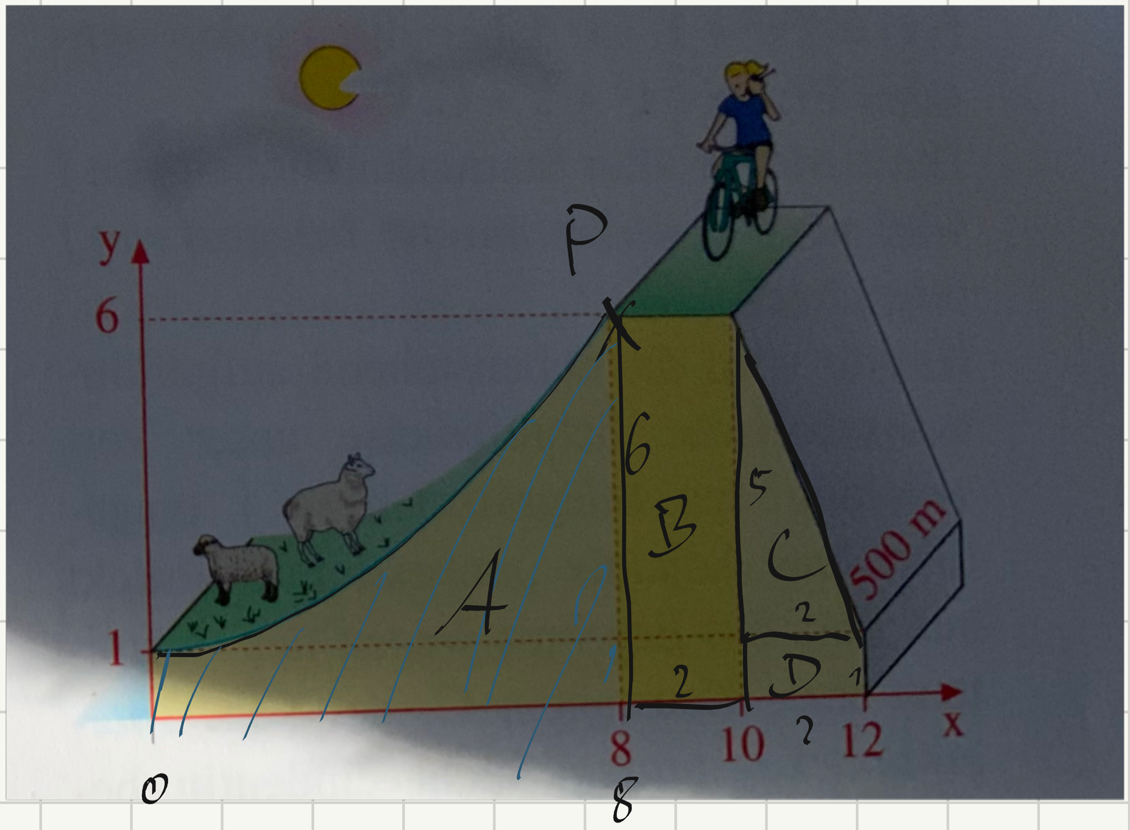
$\underline{\underline{x_1 = x_2 = 2}}$

$$C = \int_1^3 (x^2 - 4x + 4)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right]_1^3$$

$$= (\ldots) - (\ldots)$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}\,(FE)}}$$



S. 25 (13)

a) $SP(0|1)$

$P(8|6)$

$$\boxed{f(x) = a\cdot(x-u)^2+v}$$

$$f(x) = a\cdot(x+0)^2+1$$

$$6 = a\cdot(8+0)^2+1$$

$$6 = a\cdot 64+1 \quad |-1$$

$$5 = 64\cdot a \quad |:64$$

$$\frac{5}{64} = a$$

$$f(x) = \frac{5}{64}x^2+1$$

b)

$$A = \int_0^8 \left(\frac{5}{64}x^2+1\right)dx = \left[\frac{5}{192}x^3+x\right]_0^8$$

$$= \left(\frac{5}{192}\cdot 8^3+8\right) - \left(\frac{5}{192}\cdot 0^3+0\right)$$

$$= \frac{64}{3} = 21,\overline{3}\,(m^2)$$

$$B = 6\cdot 2 = 12\,(m^2)$$

$$C = \frac{2\cdot 5}{2} = 5\,(m^2)$$

$$D = 1\cdot 2 = 2\,(m^2)$$

$$A_{ges} = A+B+C+D$$

$$= 21,\overline{3}+12+5+2$$

$$= 40,\overline{3}\,(m^2) = G$$

c)

$$V = G\cdot h = 40,\overline{3}\cdot 500 = 20.166,\overline{6}\,(m^3)$$

1,8 g/cm³

$m^3 \rightarrow cm^3$

$\cdot 100^3$

$\cdot 1000000$

$$20.166,\overline{6}\ m^3 \mathrel{\hat{=}} 20.166.666.666,\overline{6}\ cm^3$$

$\cdot 1,8$

$$20.166.666.666,\overline{6}\ cm^3 \mathrel{\hat{=}} 3,63\cdot 10^{10}\ g$$

$$3,63\cdot 10^{10}\ g \mathrel{\hat{=}} 36\,300\ t$$

$: 1000\,000$

$36\,300 : 20$

$= 1815$ LKWs

Übung 9
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Kurven f und g über dem Intervall I.

a) $f(x) = x^3 + x^2$, $g(x) = x^2 + x$, $I = [-2; 1]$

b) $f(x) = 3x$, $g(x) = x^3 - x$, $I = [-1; 2]$

a) $f_{dif}(x) = f(x) - g(x)$

$f_{dif}(x) = (x^3 + x^2) - (x^2 + x)$

$f_{dif}(x) = x^3 + x^2 - x^2 - x$

$\underline{\underline{f_{dif}(x) = x^3 - x}}$

$A_{ges} = A_1 + A_2 + A_3$

$0 = x^3 - x$

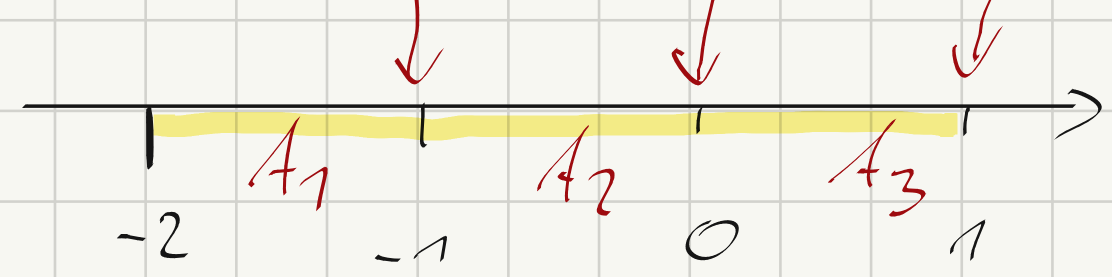
$0 = x \cdot (x^2 - 1) \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$

$0 = x^2 - 1 \quad |+1$

$1 = x^2 \quad |\sqrt{\ }$

$1 = x_2$

$-1 = x_3$



$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}$

$= -\frac{9}{4}$

$A_2 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$

$= 0{,}25$ (FE)

$A_3 = \int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$= -\frac{1}{4}$

- Wegen der Nicht-Negativitäts-Bedingung für Flächen gilt $A_1 = \frac{9}{4}$ (FE) und $A_3 = \frac{1}{4}$ (FE)

$A_{ges} = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{9}{4} + 0{,}25 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{2{,}75\text{ (FE)}}}$

S. 59 5

a) Schnittpunkt berechn.:

$2x = x^2 \quad | -2x$

$0 = x^2 - 2x \Rightarrow \boxed{f_{dif}(x) = x^2 - 2x}$

$0 = x \cdot (x-2) \Rightarrow x_1 = 0$

$0 = x - 2 \quad | +2$

$2 = x_2$

$\Rightarrow I = [0; 2]$

$$A = \int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2$$

$$= \left(\tfrac{1}{3} \cdot 2^3 - 2^2\right) - \left(\tfrac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2\right) = -\tfrac{4}{3}$$

- Wegen der - Nichtnegativitätsbedingung für Flächen gilt: $A = \frac{4}{3}$ (FE)

d) Schnittpunktberechnung:

$\frac{1}{4}x^3 + 2 = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \quad | -\frac{3}{4}x \quad | -\frac{3}{2}$

$\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + 0{,}5 = 0 \quad | \cdot 4$

$f_{dif}(x)$

$x^3 - 3x + 2 = 0$

mit WTR: $x_1 = -2$

$x_2 = 1$

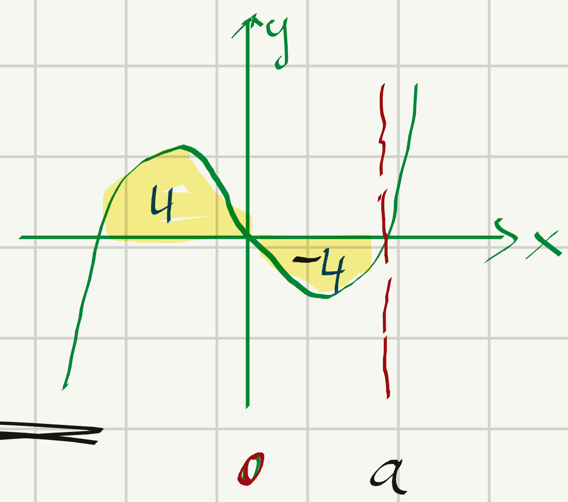
$I = [-2; 1]$

$$A = \int_{-2}^{1} \left(\tfrac{1}{4}x^3 - \tfrac{3}{4}x + 0{,}5\right) dx = \left[\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{3}{8}x^2 + 0{,}5x\right]_{-2}^{1}$$

$$= (\text{obergr.}) - (\text{untergr.}) = \frac{27}{16} \text{ (FE)}$$

Übung 7
Gegeben ist $f_a(x) = x^3 - a^2x^1$, $a > 0$. Wie muss a gewählt werden, damit die beiden von f_a und der x-Achse eingeschlossenen Flächen jeweils den Inhalt 4 haben?

- Der Funktion kann man ansehen, dass sie punktsymmetrisch zum Ursprung ist (nur ungerade Exp. und $a_0 = 0$)
- Skizze:



Nullstellenuntersuchung:

$0 = x^3 - a^2 \cdot x$

$0 = x \cdot (x^2 - a^2) \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$

$0 = x^2 - a^2 \quad | +a^2$

$a^2 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\underline{\pm a = x}$

$$-4 = \int_0^a (x^3 - a^2 \cdot x)\, dx$$

$$-4 = \left[\tfrac{1}{4} x^4 - \tfrac{1}{2} a^2 \cdot x^2\right]_0^a$$

$$-4 = \left(\tfrac{1}{4} a^4 - \tfrac{1}{2} a^2 \cdot a^2\right) - (\ 0\ )$$

$$-4 = \tfrac{1}{4} a^4 - \tfrac{1}{2} \cdot a^4$$

$$-4 = -\tfrac{1}{4} a^4 \qquad | :\left(-\tfrac{1}{4}\right)$$

$$16 = a^4 \qquad | \sqrt[4]{\ }$$

$$\pm 2 = a_{1/2}$$

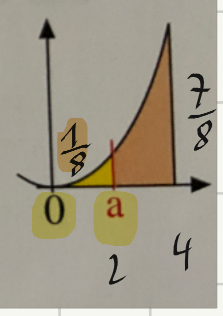
Da $a > 0$ sein muss, gilt nur $\underline{a = 2}$

$\Rightarrow$ Somit muss $a = 2$ gewählt werden, damit beide Teilflächen 4 FE groß werden.

S. 52 (8)

Übung 8

Die Fläche unter $f(x) = x^2$ über $[0; 4]$ soll durch die senkrechte Gerade $x = a$ im Verhältnis $1:7$ geteilt werden.
Wie muss a gewählt werden?



Berechnung der Gesamtfläche

$$A = \int_0^4 (x^2)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \tfrac{1}{3}\cdot 4^3 - 0 = \underline{\underline{\tfrac{64}{3}\,(FE)}}$$

Berechnung der Flächenanteile

$$\boxed{\begin{aligned} A_{klein} &= \frac{64}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{8}{3} \\ A_{groß} &= \frac{64}{3}\cdot\frac{7}{8} = \frac{56}{3} \end{aligned}}$$

Berechnung der Grenze "a"

$$\frac{8}{3} = \int_0^a (x^2)\,dx$$

$$\frac{8}{3} = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$\frac{8}{3} = \frac{1}{3}\cdot a^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3$$

$$\frac{8}{3} = \frac{1}{3}\cdot a^3 \qquad \Big| : \frac{1}{3}$$

$$8 = a^3 \qquad \Big| \sqrt[3]{\ }$$

$$\underline{\underline{2 = a}}$$

S.76

9. Besucherzahl

Auf einem Volksfest wird die Änderungsrate der Besucherzahl kontinuierlich festgestellt. Es zeigt sich, dass sie durch $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$ erfasst wird.
(t in Std., $B'(t)$ in Besucher/Std.)
Nach einer Stunde sind 405 Besucher anwesend.

a) Wie lautet die Gleichung der Funktion $B(t)$, welche die Besucheranzahl zum Zeitpunkt t angibt?
b) Wie viele Besucher sind 3 Std. nach Eröffnung anwesend?
c) Wie groß ist die maximale Besucherzahl?
d) Wann steigt die Besucherzahl am schnellsten an?
e) In welchen Zeitgrenzen kann das Modell höchstens gelten?

a) $B(t) = 5 \cdot t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C$

- Beim Start des Volksfestes ist das Festgelände leer: $C = 0$

$$\boxed{B(t) = 5 \cdot t^4 - 100t^3 + 500t^2}$$

Test: $B(1) = 405$

b) $B(3) = 5 \cdot 3^4 - 100 \cdot 3^3 + 500 \cdot 3^2$
$B(3) = 2.205$

Antwort: ...

c) notw. Bed.:

$0 = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$

- t ausklammern
- p-q-Formel

$t_1 = 0$
$t_2 = 10$
$t_3 = 5$

hinr. Bed.: $B''(t) = 60t^2 - 600t + 1000$

$B''(0) = \ldots = 1000 \Rightarrow TP$

$B''(10) = \ldots = 1000 \Rightarrow TP$

$B''(5) = \ldots = -500 \Rightarrow HP$ ☺

$t^* = 5$

$B(5) = 5 \cdot 5^4 - 1000 \cdot 5^3 + 500 \cdot 5^2 = 3.125$

Antwort: ...

d) WP_{L-R}?

$WP_{L-R}(2{,}11 \mid 1388{,}89)$

e) $t_{1,2} = 0$

$t_{3,4} = 10$

Antwort: Das Modell ergibt nur zwischen 0 und 10 Stunden einen Sinn.

Modell für $0 \leq t \leq 10$

S. 76

11. Anhalteweg

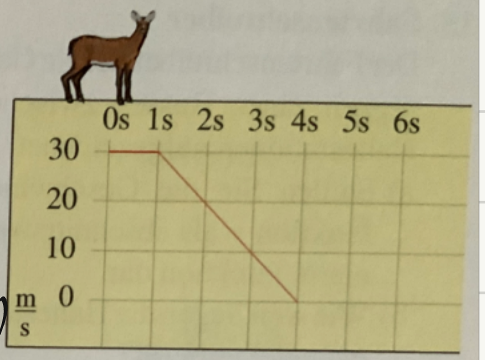
Ein LKW fährt mit einer Geschwindigkeit von 108 km/h, d. h. 30 m/s, als 100 m voraus plötzlich ein Reh auf die Fahrbahn springt. Der Fahrer reagiert eine Sekunde später mit einer Vollbremsung. Von diesem Zeitpunkt an verringert sich seine Geschwindigkeit nach der Formel v (t) = 30 − 10 t (t in s, v in m/s). s sei der Bremsweg.

$s' = v(t)$

a) Wie lautet die Gleichung von s?

b) Wie lange dauert die Bremsung?

c) Wie groß ist der Anhalteweg (Bremsweg + Reaktionsweg)? Kommt es zu einem Unfall?



a) $s(t) = 30t - 5t^2 + \Delta N$

→ zu Beginn der Bremsphase, ist der LKW 0m weit gefahren (die Reaktionszeit liegt VOR derm Einleiten der Bremsung.

$\Rightarrow \quad \Delta N = 0$

$s(t) = -5t^2 + 30t + 0$

b) $v(t) = 30 - 10t$

$0 = 30 - 10t \quad | +10t$

$10t = 30 \quad | :10$

$t = 3 \ (s)$

$s(3) = -5 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3$

$s(3) = 45 \ (m)$

Antwort:

c) $100 - 30 - 45 = 25$

Antwort: Der LKW komnt 25m vor dem Reh zum Stehen (kein Unfall).

1. Stammfunktionen ← Wir setzen also C immer auf 0

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = 2x^3 - x + 3$ c) $f(x) = \frac{6}{x^2}$

d) $f(x) = (2x+1)^3$ e) $f(x) = 2 \cdot e^{-x}$ f) $f(x) = 3\sin(\pi x + \pi)$

g) $f(x) = 4e^{2x+0{,}5}$ h) $f(x) = \frac{8}{(2x+1)^3}$ i) $f(x) = n^2 \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

1 a) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 = \frac{x^5}{5}$

b) $F(x) = 0{,}5x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$

c) $f(x) = \frac{6}{x^2} = 6 \cdot \frac{1}{x^2} = 6 \cdot x^{-2}$

$F(x) = \frac{6}{-1}x^{-1} = -6 \cdot x^{-1} = -6 \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{-\frac{6}{x}}}$

d) $f(x) = (2x+1)^3 = (2x+1) \cdot (2x+1) \cdot (2x+1)$

$= (4x^2 + 4x + 1) \cdot (2x+1)$

$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1$

$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

$\underline{F(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x}$

Vorgehen:

1) Exponentenfunkt. ableiten $\boxed{\text{Exp-Fukt.}' = 3}$

2) f(x) komplett abschreiben

3) $\frac{1}{[\ ]}$ vor die Ausgangs-Fukt.

4) In $[\ ]$ Exp-Fukt.' einsetzen

e) $f(x) = 2 \cdot e^{-x}$

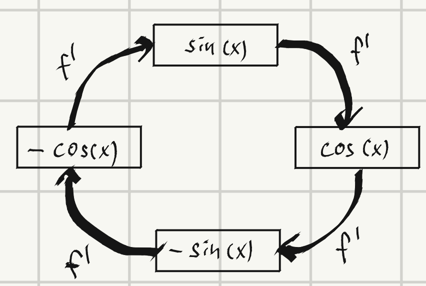
$F(x) = \frac{1}{-1} 2 \cdot e^{-x}$

$F(x) = -2e^{-x}$

g) $f(x) = 4 \cdot e^{2x+0{,}5}$

$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot e^{2x+0{,}5}$

$\underline{\underline{F(x) = 2 \cdot e^{2x+0{,}5}}}$



Beispiele:

1) $f(x) = \sin(10x)$

$F(x) = -\frac{1}{10} \cdot \cos(10x)$

f) $f(x) = 3 \cdot \sin(\pi \cdot x + \pi)$

$F(x) = -3 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot x + \pi)$

$F(x) = -\frac{3}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot x + \pi)$

h) müsst ihr noch nicht können

i) $f(x) = n^2 \cdot x^{n-1}$

$F(x) = \frac{n^2}{\cancel{n}} \cdot x^n = \underline{\underline{n \cdot x^n}}$

Ableiten mit Produkt- und Kettenregel

Funktion	Ableitung
Ableitung eines Vielfachen	
$c\,f(x)$	$c\,f'(x)$
Ableitung einer Summe	
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
Produktregel	
$f(x)\,g(x)$	$f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
Quotientenregel	
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	
$f(g(x))$	$f'(g(x))\,g'(x)$

spezielle Ableitungen:

$$\begin{tikzcd} & \boxed{\sin(x)} \arrow[dr, "f'"] & \\ \boxed{-\cos(x)} \arrow[ur, "f'"] & & \boxed{\cos(x)} \arrow[dl, "f'"] \\ & \boxed{-\sin(x)} \arrow[ul, "f'"] & \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = e^x \\ f'(x) = e^x \end{array}}$$

Anwendung der Kettenregel:

bei einer e-Funktion

$$\boxed{k(x) = e^{3x-7}}$$

$$f(x) = e^{x} \qquad f'(x) = e^{x}$$

$$g(x) = 3x-7 \qquad g'(x) = 3$$

$$k'(x) = e^{3x-7} \cdot 3$$

$$\boxed{k'(x) = 3 \cdot e^{3x-7}}$$

$$\boxed{t(x) = \cos(15x)}$$

$$f(x) = \cos(x) \qquad f'(x) = -\sin(x)$$

$$g(x) = 15x \qquad g'(x) = 15$$

$$t'(x) = -\sin(15x) \cdot 15$$

$$\boxed{t'(x) = -15 \cdot \sin(15x)}$$

Anwendung der Produktregel:

$$b(x) = \underbrace{(2x^2-4)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(5x+11)}_{g(x)}$$

$f(x) = (2x^2-4)$ | $f'(x) = 4x$

$g(x) = (5x+11)$ | $g'(x) = 5$

$$b'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$b'(x) = 4x \cdot (5x+11) + (2x^2-4) \cdot 5$$

$$b'(x) = 20x^2 + 44x + 10x^2 - 20$$

$$b'(x) = 30x^2 + 44x - 20$$

$$h(x) = \underbrace{(4x + 2)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{5x+6}}_{g(x)}$$

$f(x) = (4x+2)$ | $f'(x) = 4$

$g(x) = e^{5x+6}$ | $g'(x) = 5 \cdot e^{5x+6}$

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$h'(x) = 4 \cdot e^{5x+6} + (4x+2) \cdot 5 \cdot e^{5x+6}$$

$$h'(x) = 4 \cdot e^{5x+6} + (20x+10) \cdot e^{5x+6}$$

$$h'(x) = [4 + (20x+10)] \cdot e^{5x+6}$$

$$h'(x) = (20x+14) \cdot e^{5x+6}$$

$\ell(x) = \underbrace{(x^3 + 2x^2)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-0,5x+1}}_{g(x)}$

$f(x) = (x^3 + 2x^2)$ | $f'(x) = (3x^2 + 4x)$

$g(x) = e^{-0,5x+1}$ | $g'(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-0,5x+1}$

$$\ell'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\ell'(x) = (3x^2 + 4x) \cdot e^{-0,5x+1} + (x^3 + 2x^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-0,5x+1}$$

$$\ell'(x) = (3x^2 + 4x) \cdot e^{-0,5x+1} + \left(-\frac{1}{2}x^3 - x^2\right) \cdot e^{-0,5x+1}$$

$$\ell'(x) = \left[(3x^2 + 4x) + \left(-\frac{1}{2}x^3 - x^2\right)\right] \cdot e^{-0,5x+1}$$

$$\ell'(x) = \left[3x^2 + 4x - \frac{1}{2}x^3 - x^2\right] \cdot e^{-0,5x+1}$$

$$\ell'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 4x\right) \cdot e^{-0,5x+1}$$

$f(x) = x \cdot e^{1-x}$

(Nullstellen, Extrema, Wendepunkte)

Nullstellen:

$0 = \underbrace{x}_{} \cdot \underbrace{e^{1-x}}_{\text{niemals} = 0}$

$0 = x$

$N(0|0)$

$k(x) = (2x^2 - 18) \cdot e^{1-x}$

$0 = \underbrace{(2x^2 - 18)}_{} \cdot \underbrace{e^{1-x}}_{\text{niemals} = 0}$

$0 = 2x^2 - 18 \quad | +18$

$18 = 2x^2 \quad | :2$

$9 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$

$3 = x_1$

$-3 = x_2$

Wegen des Nullprodukt gilt:

$x_1 = 3$ und $x_2 = -3$ sind die Nullstellen von $k(x)$!

$t(x) = e^{1-x} - 1$

$0 = e^{1-x} - 1 \quad | +1$

$1 = e^{1-x} \quad | \ln$

$\ln(1) = \ln(e^{1-x})$

$0 = 1 - x \quad | +x$

$x = 1$

Gutes Video zum Thema “Nullstellen von E-Funktionen”
https://youtu.be/NvLTLZnE0wc

Ganz guter Online-Rechner (ganze Kurvendiskussion)
https://www.mathepower.com/nullstellen.php

Ableitungen (die ersten 3)

f': $f(x) = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{1-x}}_{v(x)}$

$u(x) = x \quad | \quad u'(x) = 1$

$v(x) = e^{1-x} \quad | \quad v'(x) = -1 \cdot e^{1-x}$

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot (-1) \cdot e^{1-x}$

$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} - x \cdot e^{1-x}$

$f'(x) = (1 - x) \cdot e^{1-x}$

f'':

$u(x) = 1 - x \quad | \quad v'(x) = -1$

$v(x) = e^{1-x} \quad | \quad v'(x) = -1 \cdot e^{1-x}$

$f''(x) = -1 \cdot e^{1-x} + (1 - x) \cdot (-1) \cdot e^{1-x}$

$f''(x) = -1 \cdot e^{1-x} - 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x}$

$f''(x) = (-1 - 1 + x) \cdot e^{1-x}$

$f''(x) = (x - 2) \cdot e^{1-x}$

f''':

$u(x) = x - 2 \quad | \quad u'(x) = 1$

$v(x) = e^{1-x} \quad | \quad v'(x) = -1 \cdot e^{1-x}$

$f'''(x) = 1 \cdot e^{1-x} + (x - 2) \cdot (-1) \cdot e^{1-x}$

$f'''(x) = e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} + 2 \cdot e^{1-x}$

$f'''(x) = (1 - x + 2) \cdot e^{1-x}$

$f'''(x) = (3 - x) \cdot e^{1-x}$

- Extrema:

notw. Bed.: $f'(x)=0$

$$0=(1-x)\cdot e^{1-x}$$

besitzt niemals Nullstellen!

$0=1-x \quad |+x$

$\underline{x=1}$

→ Wegen des Nullprodukts gilt:

$f'(x)=0 \Rightarrow \underline{x=1}$

hinr. Bed.: $f''(x)\neq 0$

$f''(1)=(1-2)\cdot e^{1-1}$

$f''(1)=-1 \qquad \Rightarrow HP$

f(x)-Wert:

$f(1)=1\cdot e^{1-1}$

$f(1)=1$

$\underline{HP(1|1)}$

- Wendepunkte:

notw. Bed.: $f''(x)=0$

$$0=\underbrace{(x-2)}\cdot\underbrace{e^{1-x}}$$

besitzt niemals Nullstellen

$0=x-2 \quad |+2$

$2=x$

→ Wegen des Nullprodukts gilt:

$f''(x)=0 \Rightarrow \underline{x=2}$

hinr. Bed.: $f'''(x)\neq 0$

$f'''(2)=(3-2)\cdot e^{1-2}$

$f'''(2)\approx 0{,}368 \qquad \Rightarrow WP_{R-L}$

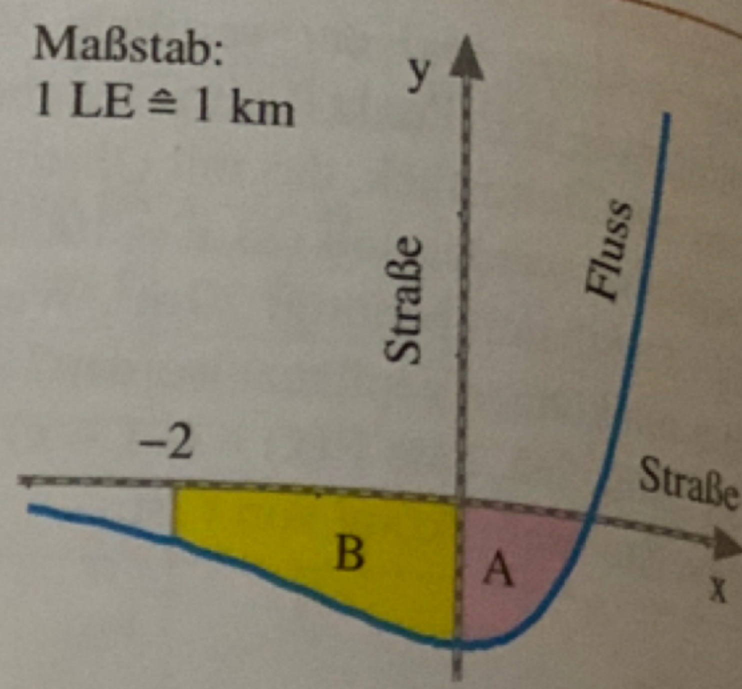
f(x)-Wert:

$f(2)=2\cdot e^{1-2}$

$f(2)\approx 0{,}736$

$\underline{WP_{R-L}(2|0{,}736)}$

Übungen



1. Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x - 1) \cdot e^x$.

a) Bestimmen Sie die Ableitungen f', f'' und f'''.

b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen.

c) Die Funktion f besitzt ein Extremum und einen Wendepunkt. Wo liegen diese Punkte?

d) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ bzw. $x \to \infty$ mit einer Tabelle.

e) Skizzieren Sie den Graphen von $f(-3 \leq x \leq 2)$.

2. Flächeninhalt

Die Funktion $f(x) = (x - 1) \cdot e^x$ (s. Bild oben) beschreibt den Verlauf eines Flusses, der von zwei Straßen überbrückt wird, die längs der Koordinatenachsen laufen. (1 LE = 1 km)
Die beiden Straßen und der Fluss schließen im 4. Quadranten ein Grundstück A ein, welches für 80 € pro m² zum Kauf angeboten wird.

a) Zeigen Sie, dass $F(x) = (x - 2) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist.

b) Berechnen Sie den Verkaufspreis für das Grundstück A.

c) Wie groß ist das im 3. Quadranten liegende Grundstück B, welches durch die Straßen, den Fluss und den Fußweg bei $x = -2$ begrenzt wird?

3. Tangenten

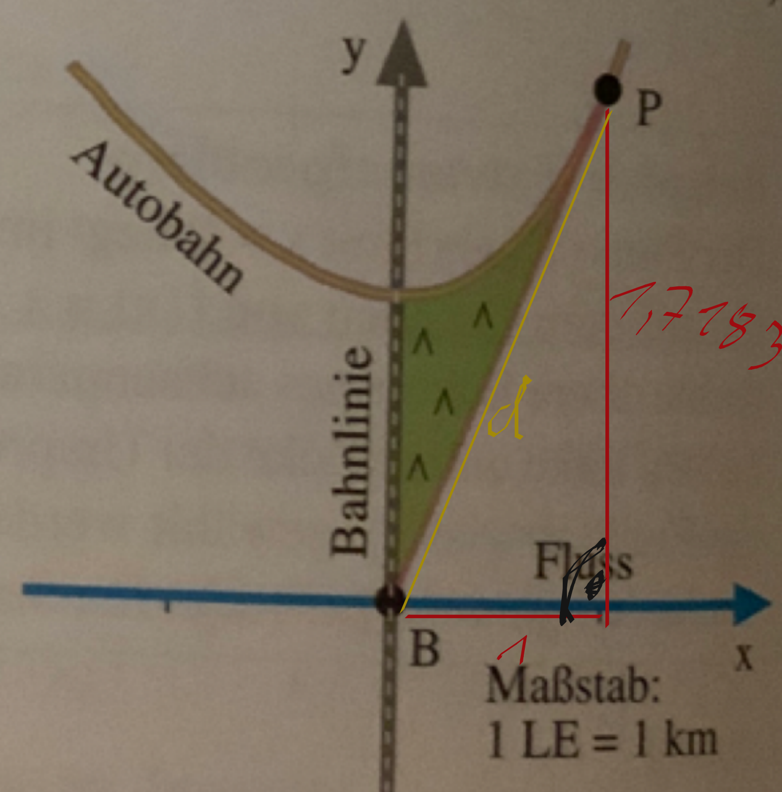
Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^x - x$. Sie beschreibt den Verlauf einer Autobahn. (1 LE = 1 km)

a) Besitzt f Extrem- und Wendepunkte?

b) Schließen Sie aus den Ergebnissen, dass f keine Nullstellen besitzt.

c) Vom Bahnhof B(0|0) führt ein Zubringer zum Punkt P(1|f(1)) der Autobahn. Zeigen Sie, dass dieser Zubringer tangential in die Autobahn mündet.
Wie lange benötigt ein 30 km/h schneller Transporter vom Bahnhof bis zur Autobahn?

d) Wie viel Hektar Fläche hat das Grundstück zwischen Straße, Zubringer und Bahnlinie? (1 Hektar = 10 000 m²)



4. Kurvenuntersuchung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{x+1}$.

a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

b) Zeichnen Sie den Graphen von f für $-3 \leq x \leq 0{,}5$.

c) Der Ursprung wird mit dem Punkt $P(-1|f(-1))$ durch eine Strecke s verbunden. Wie groß ist das Flächenstück zwischen Kurve f und Strecke s?
(*Hinweis:* Bestimmen Sie mit dem Formansatz $F(x) = \underbrace{(ax + b)}_{= g(x)} \cdot e^{x+1}$ eine Stammfunktion von f.)
Wie lang ist die Strecke s?

$g(x) = 1$

S. 112

1 a) $f(x) = \underbrace{(x-1)}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)}$

$u(x) = (x-1)$ | $u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$ | $v'(x) = e^x$

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x$
$f'(x) = e^x + x \cdot e^x - e^x$
$\underline{f'(x) = x \cdot e^x}$

$f'(x) = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)}$

$f''(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$
$\underline{f''(x) = (1+x) \cdot e^x}$

$f''(x) = \underbrace{(1+x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)}$

$f'''(x) = 1 \cdot e^x + (1+x) \cdot e^x$
$f'''(x) = e^x + e^x + x \cdot e^x$
$f'''(x) = 2 \cdot e^x + x \cdot e^x$
$\underline{f'''(x) = (2+x) \cdot e^x}$

b) $0 = (x-1) \cdot e^x$

niemals $= 0$

$0 = x - 1 \quad |+1$
$1 = x$

• wegen des Nullprodukts gilt hinsichtlich der Nullstellen von f:
$x = 1$

$N(1|0)$

c) Extremum:

• notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$0 = x \cdot e^x$

niemals $= 0$

$\underline{0 = x}$

• wegen des Nullprodukts gilt hinsichtlich des Extremas von f:
$x = 0$

• hinr. Bed.: $f''(x) \neq 0$

$f''(0) = (1+0) \cdot e^0$
$f''(0) = 1 \cdot e^0$
$f''(0) = 1 \cdot 1$
$f''(0) = 1 \Rightarrow TP$

• f(x) - Wert:

$f(0) = (0-1) \cdot e^0$
$f(0) = -1 \cdot 1$
$f(0) = -1$

$\underline{TP(0|-1)}$

Wendepunkte:

• notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = (1+x) \cdot e^{x}$$

niemals $= 0$

$$0 = 1 + x \quad | -1$$

$$-1 = x$$

• wegen des Nullprodukts gilt hinsichtlich des Wendepunkts von f:

$$x = -1$$

hinr. Bed.: $f'''(x) \neq 0$

$$f'''(-1) = (2 + (-1)) \cdot e^{-1}$$

$$f'''(-1) \approx 1 \cdot 0{,}37$$

$$f'''(-1) = 0{,}37 \quad \Rightarrow WP_{R-L}$$

f(x)-Wert:

$$f(-1) = (-1-1) \cdot e^{-1}$$

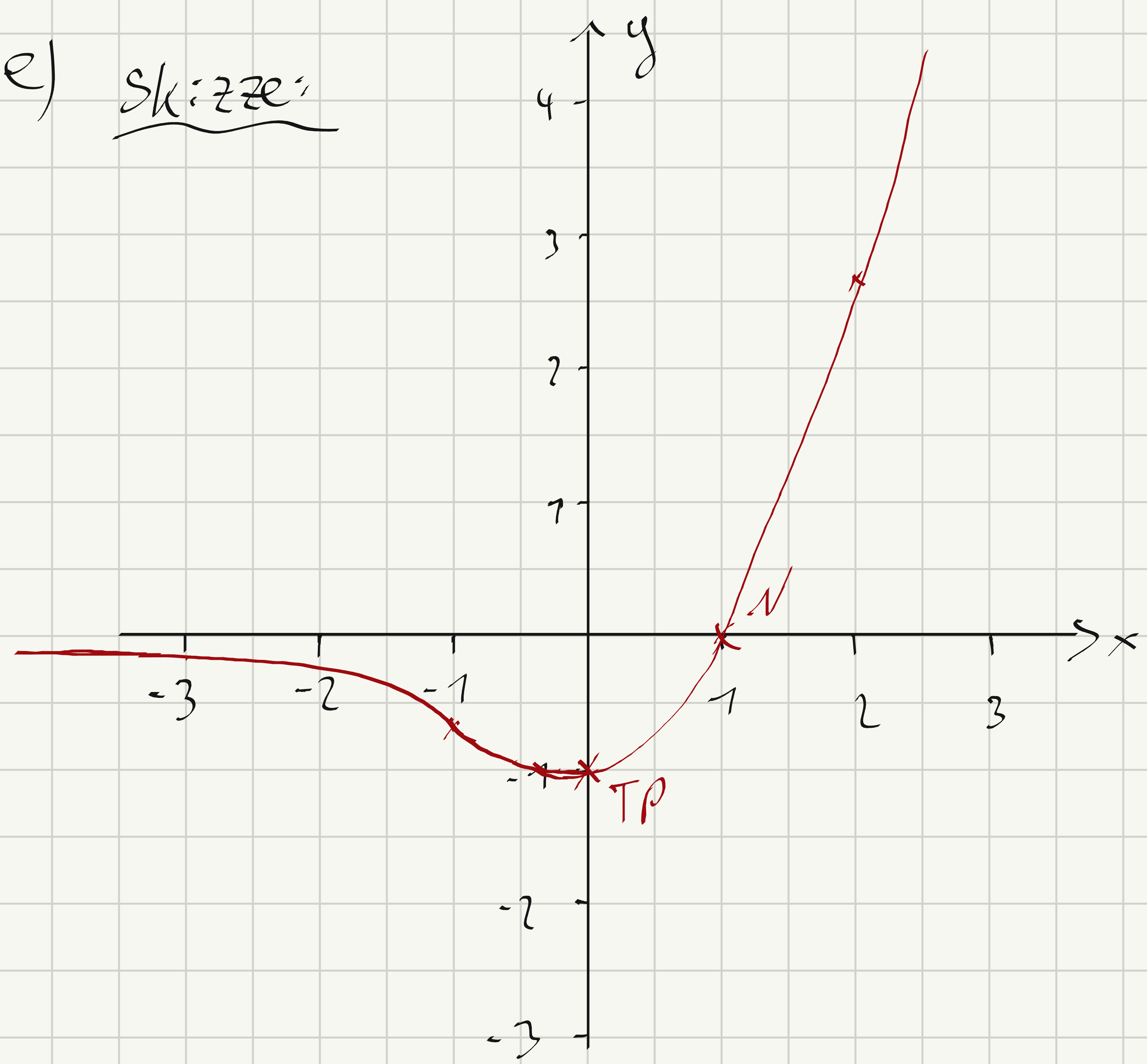
$$f(-1) \approx -2 \cdot 0{,}3679$$

$$f(-1) = -0{,}7358$$

$$\underline{\underline{WP_{R-L}(-1 \mid -0{,}7358)}}$$

d) Wir machen (vorerst) keine Grenzwertberechnungen. ☺

e) Skizze:



② a) $F(x) = \underbrace{(x-2)}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{x}}_{v(x)}$

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

$$f(x) = 1 \cdot e^{x} + (x-2) \cdot e^{x}$$
$$f(x) = e^{x} + x \cdot e^{x} - 2 \cdot e^{x}$$
$$f(x) = -1 \cdot e^{x} + x \cdot e^{x}$$
$$f(x) = (x-1) \cdot e^{x} \quad \checkmark$$

q.e.d.

b)

Überlegungen zum Intervall des Integrals:

Start: 0

Stop: Nullstelle ($x = 1 \leftarrow$ siehe 1b)

$$I = [0; 1]$$

$$A = \int_{0}^{1} \left((x-1) \cdot e^{x}\right) dx = \left[(x-2) \cdot e^{x}\right]_{0}^{1}$$
$$= \left((1-2) \cdot e^{1}\right) - \left((0-2) \cdot e^{0}\right)$$
$$\approx -2{,}718282 - (-2)$$
$$= -0{,}718282$$

- Wegen der Nicht-negativitätsbed. für Flächen gilt: $A = 0{,}718282$ FE
- mit $1 \text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1 \text{km}$:
  - $\rightarrow 0{,}718282 \text{ FE} \mathrel{\hat{=}} 0{,}718282 \text{ km}^2$
  - $\rightarrow 0{,}718282 \text{ km}^2 \mathrel{\hat{=}} 718.282 \text{ m}^2$
- mit $1 \text{m}^2 \mathrel{\hat{=}} 80€$
  - $\rightarrow 718.282 \cdot 80 = \underline{\underline{57.462.560 \text{ €}}}$

Antwort: Das Grundstück kostet (stolze) 57,5 Mio €

c) Intervall $I = [-2; 0]$

$$B = \int_{-2}^{0} \left((x-1) \cdot e^x \right) dx = \left[(x-2) \cdot e^x \right]_{-2}^{0}$$

$$= \left((0-2) \cdot e^0 \right) - \left((-2-2) \cdot e^{-2} \right)$$

$$\approx -2 - (-0{,}54134)$$

$$= -1{,}45866$$

- Wegen der Nicht-negativitätsbed. für Flächen gilt: $A = 1{,}45866$ FE
- mit $1LE \hat{=} 1km$:

$\rightarrow 1{,}45866 \text{ FE} \hat{=} 1{,}45866 \text{ km}^2$

$\rightarrow 1{,}45866 \text{ km}^2 \hat{=} \underline{\underline{1.458.660 \text{ m}^2}}$

3 a) $f(x) = e^x - x$ $\qquad f'(x) = e^x - 1$ $\qquad f''(x) = e^x$

- Prüfen auf Existenz von Extrema

notw. Bed.: $\boxed{f'(x) = 0}$

$e^x - 1 = 0 \quad | +1$

$e^x = 1 \quad | \ln$

$x = 0$

hinr. Bed.: $\boxed{f''(x) \neq 0}$

$f''(0) = e^0$

$f''(0) = 1 \Rightarrow TP$

f(x)-Wert: $f(0) = e^0 - 0$

$f(0) = 1$

$\underline{\underline{TP(0|1)}}$

- Prüfen auf Existenz von Wendepunkten

$\boxed{f''(x) = 0}$

$e^x = 0 \quad | \ln$

$x = \ln(0)$ ↯ n.d.

$\Rightarrow$ Es existiert kein WP!

b) Laut Aufgabenteil b) gibt es nur ein einziges Extremum, den Tiefpunkt TP(0/1). Die Kurve der Funktion unterschreitet demnach NIRGENDS den y-Wert 1 dieses Tiefpunkts. Damit kann die Kurve von f KEINE Nullstellen besitzen!

c) "tangential münden" $\Rightarrow$ "m" in P muss = "m" von $\overline{BP}$

"m" in P:

$f'(1) = e^1 - 1$

$f'(1) \approx 1{,}7183$

"m" von $\overline{BP}$

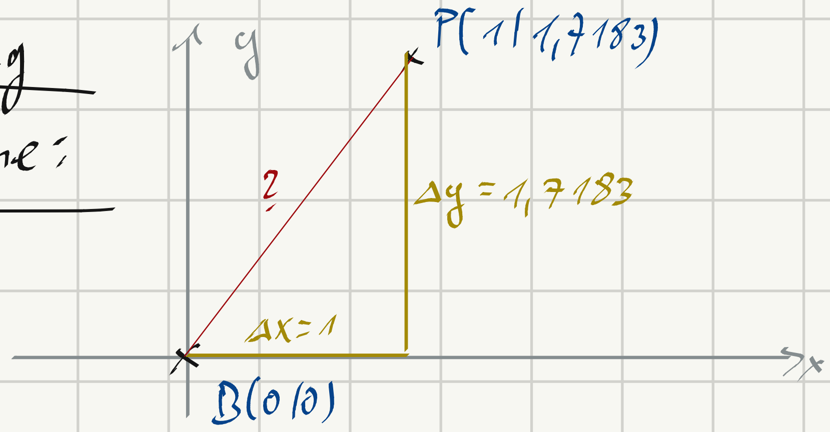
$\rightarrow$ Punktvervollst. von P:

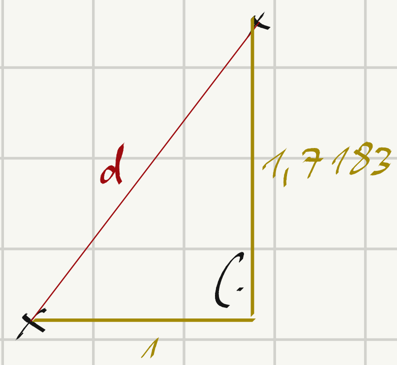
$f(1) = e^1 - 1 = 1{,}7183$ $\qquad P(1 / 1{,}7183)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1{,}7183 - 0}{1 - 0} = 1{,}7183$$

$\Rightarrow$ Da die Steigung der Geraden durch B und P exakt gleich der Steigung der Kurve von f im Punkt P ist, mündet der Zubringer tatsächlich tangential in die Autobahn.

Berechnung Zeitspanne:





$d^2 = 1{,}7183^2 + 1^2$

$d^2 \approx 3{,}9526 \quad | \sqrt{\ }$

$d \approx 1{,}988 \approx 2$ (km)

Umrechnung Stunden $\rightarrow$ Min.

$\Rightarrow$ Zeitspanne für 2 km bei 30 km/h: $\frac{2}{30} \cdot 60 = 4$ (Minuten)

Antwort: Die Fahrt dauert genau 4 Minuten.

30 km/h

d) $F = \left[\int_0^1 (f(x))\,dx\right] - \left[\int_0^1 (g(x))\,dx\right]$

Aufstellen von g(x): $m = 1{,}7183$ (siehe c)

$b = 0$ (da Ursprungsgerade)

$\Rightarrow \underline{g(x) = 1{,}7183 \cdot x}$

• Die Aufgabe enthält keinen Operator. Ich werde daher die Lösung "bestimmen".

$A = \int_0^1 (f(x))\,dx = \int_0^1 (e^x - x)\,dx \approx 1{,}218282$

$B = \int_0^1 (g(x))\,dx = \int_0^1 (1{,}7183x)\,dx = 0{,}8569$

$\cdot 1.000.000 \quad : 10.000$

$F = A - B = 1{,}218282 - 0{,}8569 = 0{,}361382$ (FE) $\hat{=}$ $\underline{36{,}1382 \text{ ha}}$

④ a) $f(x) = x \cdot e^{x+1}$

Nullstellen:

$0 = x \cdot e^{x+1}$

$0 = x$

wird nie $= 0$

- Wegen des Nullprodukts gilt:

$x = 0$

$N(0|0)$

Ableitungen:

$f(x) = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{x+1}}_{v(x)}$

$u(x) = (x-1)$ | $u'(x) = 1$

$v(x) = e^{x}$ | $v'(x) = e^{x}$

$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$

$f'(x) = 1 \cdot e^{x+1} + e^{x+1} \cdot x$

$f'(x) = (1+x) \cdot e^{x+1}$

$f''(x) = 1 \cdot e^{x+1} + e^{x+1} \cdot (1+x)$

$f''(x) = e^{x+1} + e^{x+1} + x \cdot e^{x+1}$

$f''(x) = (2+x) \cdot e^{x+1}$

$f'''(x) = 1 \cdot e^{x+1} + (2+x) \cdot e^{x+1}$

$f'''(x) = e^{x+1} + 2e^{x+1} + x \cdot e^{x+1}$

$f'''(x) = (3+x) \cdot e^{x+1}$

Extremum:

- notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$0 = (1+x) \cdot e^{x+1}$

niemals $= 0$

$0 = 1 + x \quad | -1$

$-1 = x$

- Wegen des Nullprodukts gilt:

$x = -1$

- hinr. Bed.: $f''(x) \neq 0$

$f''(-1) = (2+(-1)) \cdot e^{-1+1}$

$f''(-1) = 1 \cdot e^{0}$

$f''(-1) = 1 \Rightarrow$ Min!

- f(x)-Wert:

$f(-1) = -1 \cdot e^{-1+1}$

$f(-1) = -1$

$TP(-1|-1)$

Wendepunkt:

- notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = (2+x) \cdot e^{x+1}$$

e^{x+1} wird niemals $= 0$

$$0 = 2+x \quad | -2$$
$$\underline{-2 = x}$$

- hinr. Bed.: $f'''(x) \neq 0$

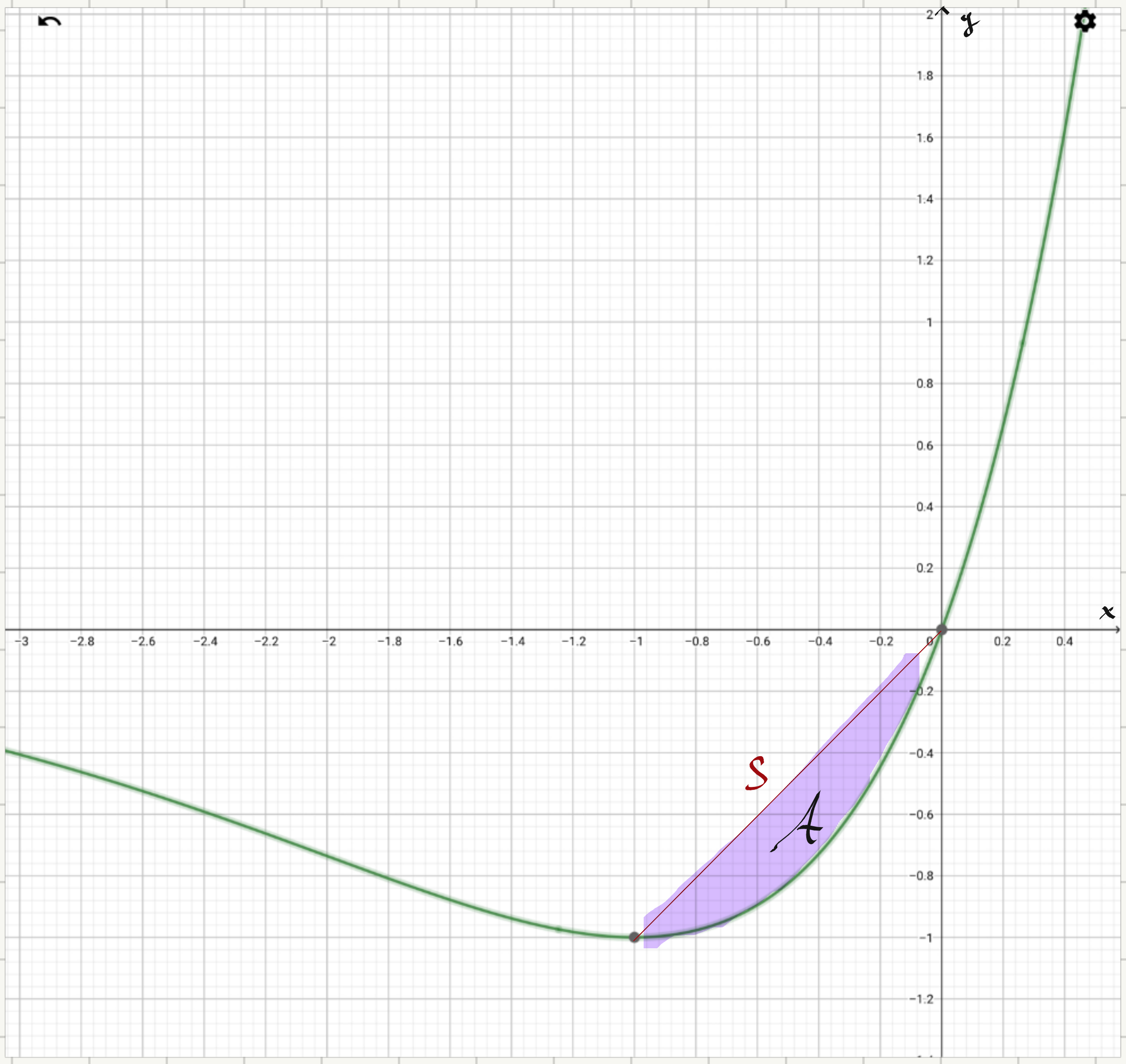
$$f'''(-2) = (3+(-2)) \cdot e^{-2+1}$$
$$f'''(-2) = 1 \cdot e^{-1}$$
$$f'''(-2) \approx 0{,}37 \Rightarrow WP_{R-L}$$

- $f(x)$-Wert:

$$f(-2) = -2 \cdot e^{-2+1}$$
$$f(-2) = -2 \cdot e^{-1}$$
$$f(-2) \approx -0{,}738$$

$$\underline{WP_{R-L}(-2 \mid -0{,}738)}$$

b)



c) Punktvervollst.:

$$f(-1) = -1 \cdot e^{-1+1}$$
$$f(-1) = -1$$
$$P = TP(-1 \mid -1)$$

Gerade zw. P und Ursprung:

$$m = \frac{-1-0}{-1-0} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{g(x) = x}$$

Flächenberechnung:

Idee: $A = B - C = \int_{-1}^{0} [f(x)]\,dx - \int_{-1}^{0} [g(x)]\,dx$

WICHTIG! „Formansatz“ - siehe Buch S. 106

Stammfunktion (mit Formansatz entwickelt)

$$F(x) = \underbrace{(ax+b)}_{u} \cdot \underbrace{e^{x+1}}_{v} \qquad u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$F'(x) = f(x) = a \cdot e^{x+1} + (ax+b) \cdot 1 \cdot e^{x+1}$$
$$f(x) = a \cdot e^{x+1} + a \cdot x \cdot e^{x+1} + b \cdot e^{x+1}$$
$$f(x) = (a + ax + b) \cdot e^{x+1}$$
$$f(x) = (ax + a+b) \cdot e^{x+1}$$

$$f(x) = x \cdot e^{x+1}$$
$$f(x) = (1 \cdot x + 0) \cdot e^{x+1}$$

$$\left| \begin{array}{rl} a &= 1 \\ a+b &= 0 \end{array} \right| \Rightarrow a = 1$$

$$1 + b = 0 \quad | -1$$
$$b = -1$$

$$\boxed{F(x) = (1 \cdot x - 1) \cdot e^{x+1}}$$

$$B = \int_{-1}^{0} [f(x)]\, dx = \left[(x-1) \cdot e^{x+1}\right] = \left((0-1) \cdot e^{0+1}\right) - \left((-1-1) \cdot e^{-1+1}\right) \approx -0{,}718$$

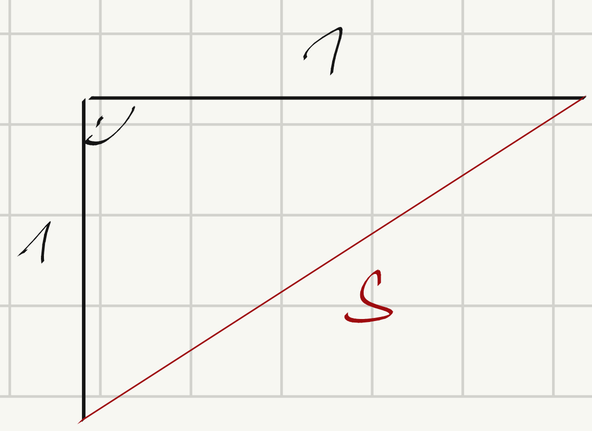
→ wegen der Nichtnegativitätsbedingung für Flächen gilt: $B = 0{,}718$ FE

$$C = \int_{-1}^{0} [g(x)]\, dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = \left(\tfrac{1}{2} \cdot 0^2\right) - \left(\tfrac{1}{2} \cdot (-1)^2\right) = -\tfrac{1}{2}$$

→ wegen der Nichtnegativitätsbedingung für Flächen gilt: $C = \frac{1}{2}$ FE

$$A = B - C = 0{,}718 - 0{,}5 = 0{,}218 \text{ (FE)}$$

Streckenlänge s:



$$s = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\approx 1{,}41 \text{ (LE)}$$

9. Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x \cdot e^{-0{,}5x}$.

a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen. Wie verhält sich f für $x \to \pm\infty$?

b) Bestimmen Sie den Extremalpunkt und den Wendepunkt von f. Beschreiben Sie das Monotonieverhalten und das Krümmungsverhalten von f.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente t von f. $\left(\text{Kontrolle: } t(x) = -\frac{4}{e^2}x + \frac{32}{e^2}\right)$

d) Zeichnen Sie die Graphen von f und t für $-1 \le x \le 8$.

10. Kurvenuntersuchung

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = e^{0{,}5x}$ und $g(x) = e^{1{,}5 - 0{,}25x}$.

a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g in einem Koordinatensystem für $-2 \le x \le 4$.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen f′ und g′.

c) Wo schneiden sich die Graphen von f und g? Wie groß ist ihr Schnittwinkel?

d) Eine Ursprungsgerade h berührt den Graphen von f als Tangente. Wo liegt der Berührpunkt von f und h? Wie lautet die Gleichung von h?

e) Wie groß ist die Fläche A, welche von f und g und der y-Achse umschlossen wird?

9 a)

$f(x) = 4x \cdot e^{-0{,}5x}$

$0 = \underbrace{4x}\cdot \underbrace{e^{-0{,}5x}}_{\text{wird niemals } =0}$

$0 = 4x \quad |:4$

$0 = x$

$\boxed{N(0|0)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \Rightarrow f(x) \to 0$

(machen wir noch!)

→ Grenzwerte

b)

$f'(x) = 4 \cdot e^{-0{,}5x} + 4x \cdot (-0{,}5 \cdot e^{-0{,}5x})$

$f'(x) = 4 \cdot e^{-0{,}5} - 2x \cdot e^{-0{,}5x}$

$f'(x) = (4 - 2x) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f(x) = \underbrace{4x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-0{,}5x}}_{v(x)}$

$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$

$f''(x) = -2 \cdot e^{-0{,}5x} + (4-2x) \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f''(x) = -2 \cdot e^{-0{,}5x} + (-2 + x) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f''(x) = -2 \cdot e^{-0{,}5x} - 2 \cdot e^{-0{,}5x} + x \cdot e^{-0{,}5x}$

$f''(x) = (-2 - 2 + x) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f''(x) = (x - 4) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f'''(x) = 1 e^{-0{,}5x} + (x-4) \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f'''(x) = e^{-0{,}5x} + (-0{,}5x + 2) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f'''(x) = 1 \cdot e^{-0{,}5x} - 0{,}5x \cdot e^{-0{,}5x} + 2 \cdot e^{-0{,}5x}$

$f'''(x) = (1 - 0{,}5x + 2) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f'''(x) = (3 - 0{,}5x) \cdot e^{-0{,}5x}$

Übungen zur Integration mit Hilfe des Formansatzes

Übung 11 Vorgegebener Formansatz S. 107

Berechnen Sie mit dem gegebenen Formansatz eine Stammfunktion von f.

a) $f(x) = (2x-3)\cdot e^{3x}$, $F(x) = (ax+b)\cdot e^{3x}$ b) $f(x) = -x\cdot e^{-0,5x}$, $F(x) = (ax+b)\cdot e^{-0,5x}$

c) $f(x) = x^2\cdot e^{-x}$, $F(x) = (ax^2+bx+c)\cdot e^{-x}$ d) $f(x) = x\cdot e^{2x} + e^{-2x}$, $F(x) = (ax+b)\cdot e^{2x} + c\cdot e^{-2x}$

Erläutern Sie in einem kurzen Text, wie man mit Formansätzen Stammfunktionen berechnen kann.

a) $F'(x) = f(x) = a\cdot e^{3x} + (ax+b)\cdot 3\cdot e^{3x}$

$f(x) = a\cdot e^{3x} + a\cdot x\cdot 3\cdot e^{3x} + b\cdot 3\cdot e^{3x}$

$f(x) = (a + 3ax + 3b)\cdot e^{3x}$

$f(x) = (3a\cdot x + a + 3b)\cdot e^{3x}$ $f(x) = (2x - 3)\cdot e^{3x}$

$\left| \begin{matrix} 3a = 2 \\ a + 3b = -3 \end{matrix} \right|$ $\Rightarrow$ $a = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} + 3b = -3 \quad | -\frac{2}{3}$

$3b = -3\frac{2}{3} \quad | :3$

$b = -\frac{11}{9}$

$$\boxed{F(x) = \left(\frac{2}{3}\cdot x - \frac{11}{9}\right)\cdot e^{3x}}$$

---

b) $F'(x) = f(x) = a\cdot e^{-0,5x} + (ax+b)\cdot(-0,5)\cdot e^{-0,5x}$

$f(x) = a\cdot e^{-0,5x} - 0,5ax\cdot e^{-0,5x} - 0,5\cdot b\cdot e^{-0,5x}$

$f(x) = (a - 0,5ax - 0,5b)\cdot e^{-0,5x}$

$f(x) = (-0,5ax + a - 0,5b)\cdot e^{-0,5x}$ $f(x) = -1x\cdot e^{-0,5x}$

$\left| \begin{matrix} -0,5a = -1 \\ a - 0,5b = 0 \end{matrix} \right|$ $:(-0,5)$ $\Rightarrow$ $a = 2$

$\Rightarrow$ $2 - 0,5b = 0 \quad | -2$

$-0,5b = -2 \quad | :(-0,5)$

$b = 4$

$$\boxed{F(x) = (2x+4)\cdot e^{-0,5x}}$$

c) $F'(x) = f(x) = (2ax + b) \cdot e^{-x} + (ax^2+bx+c) \cdot (-1) \cdot e^{-x}$

$$f(x) = 2ax \cdot e^{-x} + b \cdot e^{-x} - ax^2 e^{-x} - bxe^{-x} - ce^{-x}$$

$$f(x) = (2ax + b - ax^2 - bx - c) \cdot e^{-x}$$

$$f(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + b - c) \cdot e^{-x}$$

$$\left| \begin{array}{l} -a = 1 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \Rightarrow \underline{a = -1} \\ \Rightarrow 2 \cdot (-1) - b = 0 \\ \quad -2 - b = 0 \quad | +b \\ \quad \underline{-2 = b} \end{array}$$

$\Rightarrow -2 - c = 0 \quad | +c$

$\underline{-2 = c}$

$$\boxed{F(x) = (-x^2 - 2x - 2) \cdot e^{-x}}$$

---

d) $F(x) = (ax + b) \cdot e^{2x} + c \cdot e^{-2x}$

$$F'(x) = f(x) = a \cdot e^{2x} + (ax+b) \cdot 2 \cdot e^{2x} - 2 \cdot c \cdot e^{-2x}$$

$$f(x) = a \cdot e^{2x} + ax \cdot 2 \cdot e^{2x} + b \cdot 2 \cdot e^{2x} - 2 \cdot c \cdot e^{-2x}$$

$$f(x) = (a + 2ax + 2b) \cdot e^{2x} - 2c \cdot e^{-2x}$$

$$f(x) = (2ax + a + 2b) \cdot e^{2x} - 2c \cdot e^{-2x}$$

$| f(x) = 1x \cdot e^{2x} + 1 \cdot e^{-2x}$

$$\left| \begin{array}{l} 2a = 1 \\ a + 2b = 0 \\ -2c = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} + 2b = 0 \quad | -\frac{1}{2} \\ \quad 2b = -\frac{1}{2} \quad | :2 \\ \quad \underline{b = -\frac{1}{4}} \end{array}$$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{F(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot e^{-2x}}$$

Funktionsscharen:

$f_k(x) = -\frac{1}{2}\cdot(x^3 - 4k\cdot x + k^3)$

2.6 Die Funktion $f_k(x)$ hat in Abhängigkeit vom Parameter k veränderliche Extremstellen.

Zeigen Sie, dass in Abhängigkeit von k mögliche Extremstellen von $f_k(x)$ bei $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{4k}{3}}$ liegen.

Erläutern Sie eine Möglichkeit zur Untersuchung, ob bei den Extremstellen der Funktion ein Hochpunkt oder Tiefpunkt vorliegt.

(7 BE)

2.7 Bestimmen Sie den Parameter k so, dass die Tangente an den Graphen der Funktion f_k an der Stelle x = 2 parallel zu der Geraden g(x) = –x + 2 verläuft.

(5 BE)

$m = -1$

$x = 2$

2.6

$f_k(x) = -\frac{1}{2}\cdot(x^3 - 4k\cdot x + k^3)$; für $k > 0$ und $k, x \in \mathbb{R}$

$f_k(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2kx - \frac{1}{2}k^3$

$f_k'(x) = -1{,}5x^2 + 2k$

$f_k''(x) = -3x$

- notw. Bed.: $f_k'(x) = 0$

$0 = -1{,}5x^2 + 2k \quad | -2k$

$-2k = -1{,}5\cdot x^2 \quad | :(-1{,}5)$

$\frac{4}{3}k = x^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm\sqrt{\frac{4}{3}k} = x_{1/2}$

$\pm\sqrt{\frac{4\cdot k}{3}} = x_{1/2}$

$+\sqrt{\frac{4\cdot k}{3}} = x_1$ (+) HP

$-\sqrt{\frac{4k}{3}} = x_2$ (−) TP

2.7 $m = f_k'(x) = -1{,}5x^2 + 2k$

$-1 = -1{,}5\cdot 2^2 + 2\cdot k$

$-1 = -6 + 2k \quad | +6$

$5 = 2k \quad | :2$

$2{,}5 = k$

$f_{2,5}(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2\cdot 2{,}5\cdot x - \frac{1}{2}\cdot 2{,}5^3$

$f_{2,5}(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 5x - \frac{125}{16}$

7. **Funktionsuntersuchung mit Parameterfragen**

S. 155

Q1-Buch

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = ax^2 + x - \frac{2}{a}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Untersuchen Sie f_a auf Nullstellen.

b) Bestimmen Sie den Extrempunkt von f_a.
Hängt die Art des Extrempunktes vom Parameter a ab?

c) Skizzieren Sie die Graphen von f_1 und f_2 für $-2{,}5 \le x \le 1{,}5$.

d) Für welchen Wert von a haben die Nullstellen von f_a den Abstand 2 voneinander?

e) Für welche Werte von a verläuft der Graph von f_a durch den Punkt P(1|0)?

f) Weisen Sie nach: Alle Graphen f_a schneiden die y-Achse unter dem gleichen Winkel.

g) Für welchen Wert von a hat f_a an der Stelle x = 1 die Steigung 2?

h) Bestimmen Sie a > 0 so, dass der Inhalt des von f_a und der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücks den Wert 4,5 hat.

a) $f_a(x) = ax^2 + x - \frac{2}{a}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$$0 = ax^2 + x - \frac{2}{a} \quad | :a$$
$$0 = x^2 + \frac{1}{a} \cdot x - \frac{2}{a^2}$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{2}{a^2}}$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{2^{\cdot 4}}{a^2_{\cdot 4}}}$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{8}{4a^2}}$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\frac{9}{4a^2}}$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2a} \pm \frac{3}{2a}$$
$$\underline{x_1 = -\frac{4}{2a} = -\frac{2}{a}}$$
$$\underline{x_2 = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}}$$

b) $f_a'(x) = 2ax + 1$

$f_a''(x) = 2a$

• notw. Bed.:

$$0 = 2ax + 1 \quad |-1$$
$$-1 = 2ax \quad | :2a$$
$$-\frac{1}{2a} = x$$

- hinr. Bed.:

$$f_a''\left(-\frac{1}{2a}\right) = 2a$$

→ Da $a \neq 0$, kann $f_a''\left(-\frac{1}{2a}\right)$ nie $= 0$ werden. Es muss also ein echtes Extremum existieren (Sattelpunkt ist ausgeschlossen).

somit:

$$f_a\left(-\frac{1}{2a}\right) = a \cdot \left(-\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2a}\right) - \frac{2}{a}$$
$$f_a\left(-\frac{1}{2a}\right) = a \cdot \frac{1}{4a^2}$$
$$f_a\left(-\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4a} - \frac{1^{\cdot 2}}{2a_{\cdot 2}} - \frac{2^{\cdot 4}}{a_{\cdot 4}}$$
$$f_a\left(-\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4a} - \frac{2}{4a} - \frac{8}{4a}$$
$$f_a\left(-\frac{1}{2a}\right) = -\frac{9}{4a}$$

für $a > 0$: $TP\left(-\frac{1}{2a} \middle| -\frac{9}{4a}\right)$

für $a < 0$: $HP\left(-\frac{1}{2a} \middle| -\frac{9}{4a}\right)$

d) $\boxed{x_1 + 2 = x_2}$

$$-\frac{2}{a} + 2 = \frac{1}{a} \quad | \cdot a$$
$$-2 + 2a = 1 \quad | +2$$
$$2a = 3 \quad | :2$$
$$\underline{\underline{a = 1{,}5}}$$

e)

$$0 = a \cdot 1^2 + 1 - \frac{2}{a}$$
$$0 = a + 1 - \frac{2}{a} \quad | \cdot a$$
$$0 = a^2 + a - 2$$
$$a_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$$
$$a_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm 1{,}5$$
$$a_1 = -2$$
$$a_2 = 1$$

f)

$$\boxed{f_a'(x) = 2ax + 1}$$

Bed. für S_y: $\boxed{x = 0}$

$$f'(0) = 2 \cdot a \cdot 0 + 1$$
$$f'(0) = 1$$

Dadurch, dass alle Schnittpunkte mit der y-Achse den x-Wert 0 aufweisen, ist dieser Wert in die 1. Ableitung (Steigungsfunktion) einzusetzen.
Damit verliert der Parameter a seinen Einfluss auf das Rechenergebnis, wenn es um die Steigungen im x-Wert 0 geht.
Die Steigungswerte verändern sich in S_y nicht mit sich veränderndem a. Damit bleibt auch der Schnittwinkel zwischen f_a und der y-Achse konstant.

g)

$$\boxed{f_a'(x) = 2ax + 1}$$
$$2 = f_a'(1)$$
$$2 = 2 \cdot a \cdot 1 + 1$$
$$2 = 2a + 1 \quad | -1$$
$$1 = 2a \quad | : 2$$
$$\underline{\underline{0{,}5 = a}}$$

h)

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{3} \cdot a \cdot x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{a}x}$$

Nullstellen (siehe a)

$$\boxed{x_1 = -\frac{2}{a} \qquad x_2 = \frac{1}{a}}$$

$$4{,}5 = \left| \int_{-\frac{2}{a}}^{\frac{1}{a}} \left(ax^2 + x - \frac{2}{a}\right) dx \right|$$
$$4{,}5 = \left| \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{a}x\right]_{-\frac{2}{a}}^{\frac{1}{a}} \right|$$
$$4{,}5 = \left| \left[\frac{1}{3} \cdot a\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{a}\right] - \left[\frac{1}{3} \cdot a \cdot \left(-\frac{2}{a}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{a}\right)^2 - \frac{2}{a} \cdot \left(-\frac{2}{a}\right)\right] \right|$$
$$4{,}5 = \left| \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^2}\right] - \left[\frac{1}{3} \cdot a \cdot \left(-\frac{8}{a^3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^2}\right] \right|$$
$$4{,}5 = \left| \left[\frac{1}{3a^2} + \frac{1}{2a^2} - \frac{2}{a^2}\right] - \left[-\frac{8}{3a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{4}{a^2}\right] \right|$$
$$4{,}5 = \left| \frac{1}{3a^2}_{\cdot 2} + \frac{1}{2a^2}_{\cdot 3} - \frac{2}{a^2}_{\cdot 6} + \frac{8}{3a^2}_{\cdot 2} - \frac{2}{a^2}_{\cdot 6} - \frac{4}{a^2}_{\cdot 6} \right|$$
$$4{,}5 = \left| \frac{2}{6a^2} + \frac{3}{6a^2} - \frac{12}{6a^2} + \frac{16}{6a^2} - \frac{12}{6a^2} - \frac{24}{6a^2} \right|$$
$$4{,}5 = \left| -\frac{27}{6a^2} \right| \quad | \cdot 6a^2$$
$$27a^2 = |-27|$$
$$27a^2 = 27 \quad | : 27$$
$$a^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$$
$$a_{1/2} = \pm 1$$

$\Rightarrow$ Da $a > 0$ sein muss, gilt $\underline{\underline{a = 1.}}$

3. Wasserspielplatz

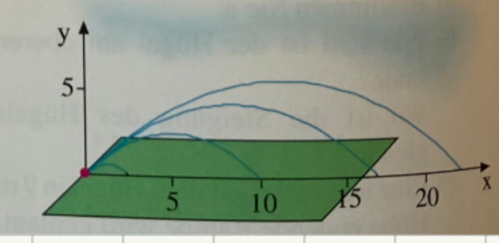
Auf dem Wasserspielplatz gibt es eine Bodendüse, aus der mit wechselnder Geschwindigkeit a Wasserstrahlen ausgestoßen werden, deren Parabelbahnen erfasst werden durch die Schar $f_a(x) = -\frac{10}{a^2}x^2 + x$, $a > 0$. Dabei ist a die Ausstoßgeschwindigkeit des Wassers in m/s.

a) Für welches a hat der Wasserstrahl eine Reichweite von exakt 10 m?

b) Für welches a steigt der Strahl 10 m hoch?

c) Zeigen Sie: Alle Wasserstrahlen werden unter dem gleichen Winkel α ausgestoßen.

d) In 8 m Entfernung steht ein 1,60 m großes Kind und badet. Für welches a trifft der Strahl genau auf seinen Kopf?



aus Test S. 166 (Q1-Buch)

a) $N(10|0)$

$$0 = -\frac{10}{a^2}\cdot 10^2 + 10 \quad | -10$$
$$-10 = -\frac{10}{a^2}\cdot 100 \quad | \cdot a^2$$
$$-10a^2 = -10\cdot 100 \quad | :(-10)$$
$$a^2 = 100 \quad | \sqrt{}$$
$$a_{1,2} = \pm 10$$

$\Rightarrow$ Da $a>0$ sein muss gilt: $\underline{a = 10}$

b) $f_a(x) = -\frac{10}{a^2}\cdot x^2 + x \quad , \quad a>0$

Berechnung x-Wert des Scheitelp. in Abhängigkeit von a:

$$f_a'(x) = -\frac{20}{a^2}\cdot x + 1$$
$$0 = -\frac{20}{a^2}\cdot x + 1 \quad | -1$$
$$-1 = -\frac{20}{a^2}\cdot x \quad | :\left(-\frac{20}{a^2}\right)$$
$$\frac{a^2}{20} = x_{Sp}$$

$$10 = -\frac{10}{a^2}\cdot\left(\frac{a^2}{20}\right)^2 + \frac{a^2}{20}$$
$$10 = -\frac{10}{a^2}\cdot\frac{a^4}{400} + \frac{a^2}{20}$$
$$10 = -\frac{10a^4}{400a^2} + \frac{a^2}{20}$$
$$10 = -\frac{a^2}{40} + \frac{2a^2}{40}$$
$$10 = \frac{a^2}{40} \quad | \cdot 40$$
$$400 = a^2 \quad | \sqrt{}$$
$$\pm 20 = a_{1,2}$$

$\Rightarrow$ Da $a>0$ sein muss gilt: $\underline{a = 20}$

c) $f_a'(x) = -\frac{20}{a^2}x + 1$

Bed. für S_y: $\boxed{x = 0}$

$$f'(0) = -\frac{20}{a^2}\cdot 0 + 1$$
$$f'(0) = 1$$

Dadurch, dass alle Schnittpunkte mit der y-Achse den x-Wert 0 aufweisen, ist dieser Wert in die 1. Ableitung (Steigungsfunktion) einzusetzen.
Damit verliert der Parameter a seinen Einfluss auf das Rechenergebnis, wenn es um die Steigungen im x-Wert 0 geht.
Die Steigungswerte verändern sich in S_y nicht mit sich veränderndem a. Damit bleibt auch der Schnittwinkel zwischen f_a und der y-Achse konstant.

d)

$$1{,}6 = -\frac{10}{a^2}\cdot 8^2 + 8 \quad | -8$$
$$-\frac{32}{5} = -\frac{10}{a^2}\cdot 64 \quad | :64$$
$$-\frac{1}{10} = -\frac{10}{a^2} \quad | \cdot a^2$$
$$-\frac{1}{10}a^2 = -10 \quad | :\left(-\frac{1}{10}\right)$$
$$a^2 = 100 \quad | \sqrt{}$$
$$a_{1,2} = \pm 10$$

$\Rightarrow$ Da $a>0$ sein muss gilt: $\underline{a = 20}$

Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus lösen:

Q2-Buch: S. 17

1. Dreiecksform

Lösen Sie das LGS. Formen Sie das LGS ggf. zunächst in ein Dreieckssystem um.

a) $\begin{aligned} 2x + 4y - z &= -13 \\ 2y - 2z &= -12 \\ 3z &= 9 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x + 4y - 3z &= 3 \\ -6y + 5z &= 7 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x - 2y + 2z &= 6 \\ 2x - z &= 2 \\ -3x &= -6 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x - 3y + 5z &= -2 \\ y + 2z &= 8 \\ y + z &= 6 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x + y + 4z &= 10 \\ 2y - 5z &= -14 \\ y + 3z &= 4 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 8 \\ -2x + y + 2z &= 3 \\ 4z &= 8 \end{aligned}$

a) $\begin{array}{l|rcl|} \text{I} & 2x + 4y - 1z &=& -13 \\ \text{II} & 2y - 2z &=& -12 \\ \text{III} & 3z &=& 9 \end{array}$

aus III: $3z = 9 \quad |:3$

$z = 3$

aus II: mit $z = 3$

$2 \cdot y - 2 \cdot 3 = -12$

$2y - 6 = -12 \quad |+6$

$2y = -6 \quad |:2$

$y = -3$

aus I mit $z = 3$ und $y = -3$

$2x + 4 \cdot (-3) - 1 \cdot 3 = -13$

$2x - 12 - 3 = -13$

$2x - 15 = -13 \quad |+15$

$2x = 2 \quad |:2$

$x = 1$

$\mathbb{L} = \{(1 | -3 | 3)\}$

Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus lösen:

Q2-Buch: S. 17

1. Dreiecksform

Lösen Sie das LGS. Formen Sie das LGS ggf. zunächst in ein Dreieckssystem um.

a) $\begin{aligned} 2x+4y-z&=-13\\ 2y-2z&=-12\\ 3z&=9 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x+4y-3z&=3\\ -6y+5z&=7\\ 2z&=4 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x-2y+2z&=6\\ 2x-z&=2\\ -3x&=-6 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x-3y+5z&=-2\\ y+2z&=8\\ y+z&=6 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x+y+4z&=10\\ 2y-5z&=-14\\ y+3z&=4 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 2x+2y-z&=8\\ -2x+y+2z&=3\\ 4z&=8 \end{aligned}$

a)
$$\begin{array}{l|l|} \text{I} & 2x+4y-z=-13 \\ \text{II} & 2y-2z=-12 \\ \text{III} & 3z=9 \end{array}$$

aus III: $3z=9 \quad |:3$

$z=3$

mit $\boxed{2y-2z=-12}$ und $\boxed{z=3}$

$2y-2\cdot 3=-12$

$2y-6=-12 \quad |+6$

$2y=-6 \quad |:2$

$y=-3$

mit $\boxed{2x+4y-z=-13}$ und $\boxed{z=3}$ und $\boxed{y=-3}$

$2x+4\cdot(-3)-3=-13$

$2x-12-3=-13$

$2x-15=-13 \quad |+15$

$2x=2 \quad |:2$

$x=1$

$\mathbb{L}=\{(1|-3|3)\}$

b)
$$\begin{array}{l|l|} \text{I} & 2x+4y-3z=3 \\ \text{II} & -6y+5z=7 \\ \text{III} & 2z=4 \end{array}$$

aus III) $2z=4 \quad |:2$

$z=2$

mit $\boxed{-6y+5z=7}$ und $\boxed{z=2}$

$-6y+5\cdot 2=7$

$-6y+10=7 \quad |-10$

$-6y=-3 \quad |:(-6)$

$y=0{,}5$

mit $\boxed{2x+4y-3z=3}$ und $\boxed{z=2}$ und $\boxed{y=0{,}5}$

$2x+4\cdot 0{,}5-3\cdot 2=3$

$2x+2-6=3$

$2x-4=3 \quad |+4$

$2x=7 \quad |:2$

$x=3{,}5$

$\mathbb{L}=\{(3{,}5|0{,}5|2)\}$

② S. 17

a)
$$\left|\begin{array}{l} 4x - 2y + 2z = 2 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ 3x - 5y + z = -7 \end{array}\right| \quad (+) \rightarrow 2x + 1y + 0 = 2$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x + 1y + 0 = 2 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ 3x - 5y + z = -7 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x + 1y + 0 = 2 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ 6x - 10y + 2z = -14 \end{array}\right| \quad (+) \rightarrow 4x - 7y + 0 = -14$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x + 1y + 0 = 2 \\ 4x - 7y + 0 = -14 \\ 6x - 10y + 2z = -14 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} 14x + 7y + 0 = 14 \\ 4x - 7y + 0 = -14 \\ 6x - 10y + 2z = -14 \end{array}\right| \quad (+) \rightarrow 18x + 0 + 0 = 0$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left|\begin{array}{l} 18x + 0 + 0 = 0 \\ 4x - 7y + 0 = -14 \\ 6x - 10y + 2z = -14 \end{array}\right|$$

aus I) $18x = 0 \quad |:18$

$x = 0$

mit $\boxed{4x - 7y + 0 = -14}$ und $\boxed{x = 0}$

$4 \cdot 0 - 7y = -14$

$-7y = -14 \quad |:(-7)$

$y = 2$

mit $\boxed{6x - 10y + 2z = -14}$ und $\boxed{x = 0}$ und $\boxed{y = 2}$

$6 \cdot 0 - 10 \cdot 2 + 2 \cdot z = -14$

$-20 + 2z = -14 \quad |+20$

$2z = 6 \quad |:2$

$z = 3$

$\mathbb{L} = \{(0|2|3)\}$

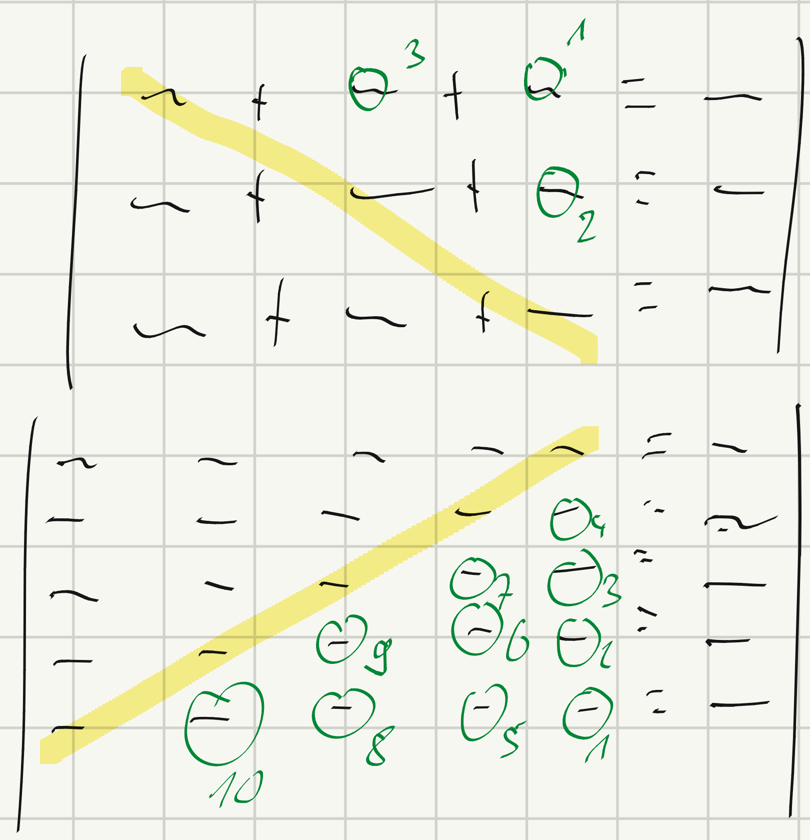
Rechenregeln:

1) Man darf jede der Gleichungszeilen mit einem beliebigen Zahlenwert multiplizieren oder dividieren

2) Man darf die Reihenfolge der Gleichungen beliebig vertauschen

3) Man darf zwei beliebige Gleichungszeilen miteinander addieren (also quasi das Additionsverfahren anwenden)und anschließend die entstandene Lösungszeile für eine der beiden addierten Gleichung einsetzen (oder besser: ersetzen)

In welcher Reihenfolge müssen die Nullen erzeugt werden?



c)

$$\left|\begin{array}{l} 2x + 2y - 3z = -7 \\ -1x - 2y - 2z = 3 \\ 4x + 1y - 2z = -1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} -7 \\ 3 \\ -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} -7 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right| \xrightarrow{+} -5 \quad -3 \quad 0 = 4$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \\ -5 & -3 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} -7 \\ 3 \\ 4 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot(-3) \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & 6 \\ -5 & -3 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} -14 \\ -9 \\ 4 \end{array}\right| \xrightarrow{+} 7 \quad 10 \quad 0 = -23$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 4 & -6 \\ 7 & 10 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} -14 \\ -23 \\ 4 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \cdot 10 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 4 & -6 \\ 21 & 30 & 0 \\ -50 & -30 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} -14 \\ -69 \\ 40 \end{array}\right| \xrightarrow{+} -29 \quad 0 \quad 0 = -29$$

$$\begin{array}{c|ccc|c|c|} & x & y & z & & \\ \text{I} & 4 & 4 & -6 & = & -14 \\ \text{II} & 21 & 30 & 0 & & -69 \\ \text{III} & -29 & 0 & 0 & & -29 \end{array}$$

aus III: $-29x = -29 \quad |:(-29)$

$\underline{\underline{x = 1}}$

mit II und $x = 1$: $21 \cdot 1 + 30y = -69$

$21 + 30y = -69 \quad |-21$

$30y = -90 \quad |:30$

$\underline{\underline{y = -3}}$

mit I und $x = 1$ und $y = -3$ $\quad 4 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) - 6z = -14$

$4 - 12 - 6z = -14$

$-8 - 6z = -14 \quad |+8$

$-6z = -6 \quad |:(-6)$

$\underline{\underline{z = 1}}$

$\mathbb{L} = \{(1 \mid -3 \mid 1)\}$

S. 17 2e

$$\begin{vmatrix} x & -2y & +z & =0 \\ & 3y & +z & =9 \\ 2x & +y & & =4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-)} \quad 1 \quad -5 \quad 0 \quad = -9$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -9 \\ 4 \end{vmatrix} \cdot 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -9 \\ 20 \end{vmatrix} \xrightarrow{(+)} \quad 11 \quad 0 \quad 0 \quad = 11$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 \\ -9 \\ 11 \end{vmatrix}$$

aus III: $11x = 11 \quad | :11$

$\underline{\underline{x = 1}}$

aus II und $x = 1$:

$1 \cdot 1 - 5y = -9$

$1 - 5y = -9 \quad | -1$

$-5y = -10 \quad | :(-5)$

$\underline{\underline{y = 2}}$

aus I und $x = 1$ und $y = 2$:

$1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1z = 0$

$1 - 4 + z = 0$

$-3 + z = 0 \quad | +3$

$\underline{\underline{z = 3}}$

$\mathbb{L} = \{(1 | 2 | 3)\}$

Gleichungssysteme OHNE Lösung

$$\left|\begin{array}{rrrl} x & +2y & -z & =3 \\ 2x & -y & +2z & =8 \\ 3x & +11y & -7z & =6 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rrrl} 2x & +4y & -2z & =6 \\ 2x & -y & +2z & =8 \\ 3x & +11y & -7z & =6 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rrrl} 4x & +3y & +0 & =14 \\ 2x & -y & +2z & =8 \\ 3x & +11y & -7z & =6 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot 7 \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rrrl} 4x & +3y & +0 & =14 \\ 14x & -7y & +14z & =56 \\ 6x & +22y & -14z & =12 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rrrl} 4x & +3y & +0 & =14 \\ 20x & +15y & +0 & =68 \\ 6x & +22y & -14z & =12 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot(-5) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rrrl} -20x & -15y & +0 & =-70 \\ 20x & +15y & +0 & =68 \\ 6x & +22y & -14z & =12 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left|\begin{array}{rrrl} 0 & +0 & +0 & =-2 \\ 20x & +15y & +0 & =68 \\ 6x & +22y & -14z & =12 \end{array}\right|$$

aus I: $0 + 0 + 0 = -2$

$0 = -2$ ↯ Widerspruch

$\mathbb{L} = \{ \}$

Dieses Gleichungssystem ist nicht lösbar!

Gleichungssysteme mit UNENDLICH VIELEN Lösungen

$$\left|\begin{array}{rrrl} 2x & +y & -4z & =1 \\ 3x & +2y & -7z & =1 \\ 4x & -3y & +2z & =7 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \cdot 7 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rrrl} 2x & +y & -4z & =1 \\ 6x & +4y & -14z & =2 \\ 28x & -21y & +14z & =49 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rrrl} 2x & +y & -4z & =1 \\ 6x & +4y & -14z & =2 \\ 34x & -17y & 0 & =51 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rrrl} 14x & +7y & -28z & =7 \\ -12x & -8y & +28z & =-4 \\ 34x & -17y & +0 & =51 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rrrl} 14x & +7y & -28z & =7 \\ 2x & -y & +0 & =3 \\ 34x & -17y & +0 & =51 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot(-17) \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rrrl} 14x & +7y & -28z & =7 \\ -34x & +17y & +0 & =-51 \\ 34x & -17y & +0 & =51 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left|\begin{array}{rrrl} 14x & +7y & -28z & =7 \\ -34x & +17y & +0 & =-51 \\ 0 & +0 & +0 & =0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \text{„Nullerzeile"} \end{array}$$

aus III: $0 = 0$ ☺ ✓

$\mathbb{L} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ es existieren unendlich viele Lösungen

S. 19

1 a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right) \quad (+) \rightarrow 6 \quad 4 \quad 0 = 10$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right) \quad (+) \rightarrow 6 \quad 4 \quad 0 \quad 10$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 0 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right) \quad (-) \rightarrow 0 \quad 0 \quad 0 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nullerzeile!

⇒ Es existieren unendlich viele Lösungen

$\mathbb{L} = \mathbb{R}$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -2 & 10 \\ 2 & 8 & -5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & -5 & 6 \\ 3 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & -5 & 6 \\ 3 & 5 & -2 & 10 \\ 8 & 4 & 2 & 16 \end{array}\right) \quad (+) \rightarrow 11 \quad 9 \quad 0 = 26$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & -5 & 6 \\ 3 & 5 & -2 & 10 \\ 11 & 9 & 0 & 26 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 5 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -16 & 10 & -12 \\ 15 & 25 & -10 & 50 \\ 11 & 9 & 0 & 26 \end{array}\right) \quad (+) \rightarrow 11 \quad 9 \quad 0 = 38$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -16 & 10 & -12 \\ 11 & 9 & 0 & 38 \\ 11 & 9 & 0 & 26 \end{array}\right) \quad (-) \rightarrow 0 \quad 0 \quad 0 = 12$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -16 & 10 & -12 \\ 11 & 9 & 0 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

↯ Widerspruch

⇒ Es existiert keine Lösung

$\mathbb{L} = \{\}$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -5 & 9 \\ 2 & 5 & -9 & 11 \\ 6 & -11 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

S. 17

③ b)

$$\left|\begin{array}{l} 2y - 5 = z + 2x \\ -2z = x - 2y \\ 4x = y - 10 \end{array}\right|$$

ordnen

Was tun bei "Unordnung"!

$$\left|\begin{array}{l} -2x + 2y - z = 5 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ 4x - y + 0z = -10 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cccc} -2 & 2 & -1 & = 5 \\ -1 & 2 & -2 & = 0 \\ 4 & -1 & 0 & = -10 \end{array}\right| \cdot(-2)$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 4 & -4 & 2 & = -10 \\ -1 & 2 & -2 & = 0 \\ 4 & -1 & 0 & = -10 \end{array}\right| (+) \rightarrow \quad 3 \quad -2 \quad 0 \quad = -10$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 4 & -4 & 2 & = -10 \\ 3 & -2 & 0 & = -10 \\ 4 & -1 & 0 & = -10 \end{array}\right| \cdot(-2)$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 4 & -4 & 2 & = -10 \\ 3 & -2 & 0 & = -10 \\ -8 & 2 & 0 & = 20 \end{array}\right| (+) \rightarrow \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad = 10$$

$$\begin{array}{c|cccc|} & x & y & z & \\ \text{I} & 4 & -4 & 2 & = -10 \\ \text{II} & 3 & -2 & 0 & = -10 \\ \text{III} & -5 & 0 & 0 & = 10 \end{array}$$

aus III: $\quad -5x = 10 \quad |:(-5)$

$$\underline{\underline{x = -2}}$$

aus II und $x = -2$:

$$\begin{aligned} 3\cdot(-2) - 2y &= -10 \\ -6 - 2y &= -10 \quad |+6 \\ -2y &= -4 \quad |:(-2) \\ \underline{y} &\underline{= 2} \end{aligned}$$

aus I und $x = -2$ und $y = 2$:

$$\begin{aligned} 4\cdot(-2) - 4\cdot 2 + 2z &= -10 \\ -8 - 8 + 2z &= -10 \quad |+16 \\ 2z &= 6 \quad |:2 \\ \underline{z} &\underline{= 3} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-2 \mid 2 \mid 3)\}}}$$

d)
$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z = 4 \\ \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{2}z = -2 \\ y - \frac{1}{2}z = 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot 6 \\ \cdot 2 \end{array}$$

Was tun bei Brüchen?

durch Multiplikation mit „Hauptnenner" Brüche beseitigen

$$\left|\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 16 \\ 9x - 4y - 3z = -12 \\ 0 + 2y - z = 4 \end{array}\right|$$

$\vdots$

$\mathbb{L} = \{(4|6|8)\}$

S. 29	„normale" Anwendungsaufg. LGS — 5 + 6	S. 37	Übungen zu Mischungsverhältnissen — 22 – 24

5

Anz. voll :	v
Anz. Rentner :	r
Anz. Studenten :	s

$$\left|\begin{array}{l} v + r + s = 400 \\ 9v + 6r + 5s = 3300 \\ 3r = s \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot(-9) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} -9v - 9r - 9s = -3600 \\ 9v + 6r + 5s = 3300 \\ 3r = s \end{array}\right| \begin{array}{l} (+) \to 0 - 3r - 4s = -300 \\ \\ -s \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} -9v - 9r - 9s = -3600 \\ -3r - 4s = -300 \\ 3r - s = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ (+) \to 0 - 5s = -300 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{I} & -9v - 9r - 9s = -3600 \\ \text{II} & -3r - 4s = -300 \\ \text{III} & -5s = -300 \end{array}$$

aus III: $-5s = -300 \quad |:(-5)$

$\underline{s = 60}$

aus II und $s = 60$:

$-3r - 4 \cdot 60 = -300$

$-3r - 240 = -300 \quad |+240$

$-3r = -60 \quad |:(-3)$

$\underline{r = 20}$

aus I und $s = 60$ und $r = 20$:

$-9 \cdot v - 9 \cdot 20 - 9 \cdot 60 = -3600$

$-9v - 180 - 540 = -3600$

$-9v = -2880 \quad |:(-9)$

$\underline{v = 320}$

Antwort: Es werden genau 320 volle Karten verkauft.

6

€ in Schatzbriefe :	s	3% p.a.
€ in Immobilienfonds :	i	5% p.a.
€ in Aktien :	a	8% p.a.

wird zu I • Aktien doppelt so viel wie Schatzbriefe

wird zu II • 1820 € Rendite (gesamt)

wird zu III • 30 000 € Kapital (gesamt)

$$\begin{array}{l|l} \text{I} & 2 \cdot s = a \\ \text{II} & 0{,}03s + 0{,}05i + 0{,}08a = 1820 \\ \text{III} & s + i + a = 30.000 \end{array}$$

9

9. Sparschwein
Hans hat in seinem Sparschwein 102 Münzen. Es sind nur 1 ct-, 2 ct-, 5 ct-, und 10 ct-Münzen. Die Anzahl der 2 ct-Münzen ist genauso groß wie die Anzahl der restlichen Münzen. Von den 10 ct-Münzen hat Hans eine mehr als von den 1ct-Münzen. Der Wert aller Münzen beträgt 3,82 €. Wie viele 5 ct-Münzen besitzt Hans?

Anz. 1ct :	x
Anz. 2ct :	y
Anz. 5ct :	z
Anz. 10ct :	t

$$\left|\begin{array}{l} y = x + z + t \\ t = x + 1 \\ x + y + z + t = 102 \\ 0{,}01x + 0{,}02y + 0{,}05z + 0{,}1t = 3{,}82 \end{array}\right|$$

(22) S. 37

$$\left| \begin{array}{l} A + B + C = 10 \\ 0{,}03A + 0{,}05B + 0{,}06C = 0{,}04 \\ B = C \end{array} \right|$$

(23) x: gute Quali
y: mittlere Quali

$$\left| \begin{array}{l} 0{,}25x + 0{,}75y = 30 \\ 0{,}75x + 0{,}25y = 29 \end{array} \right|$$

(24)

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 20.000 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 = 9000 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}1x_3 = 8000 \end{array} \right|$$

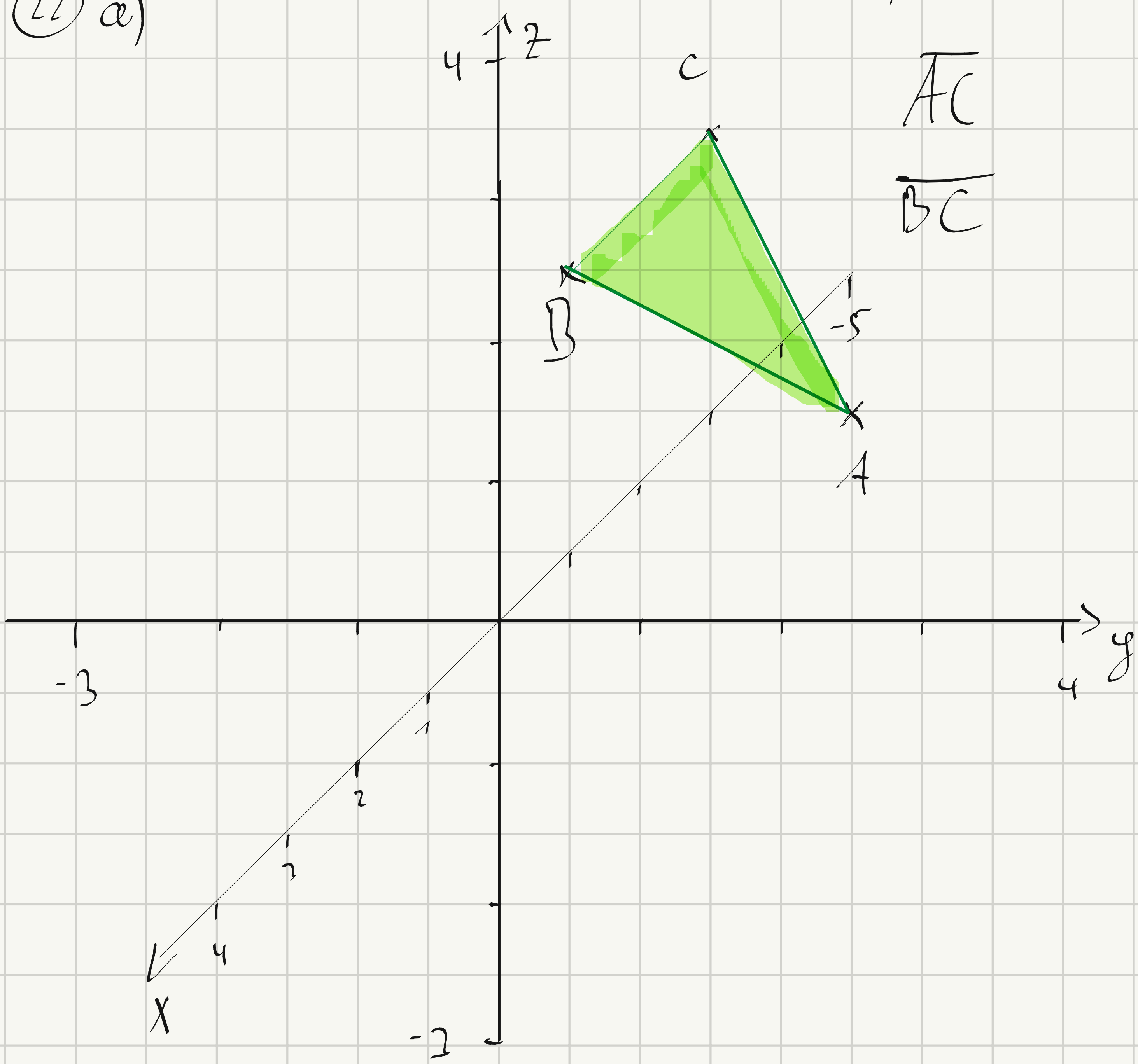
S. 53

(22) a)

$\overline{AB}$

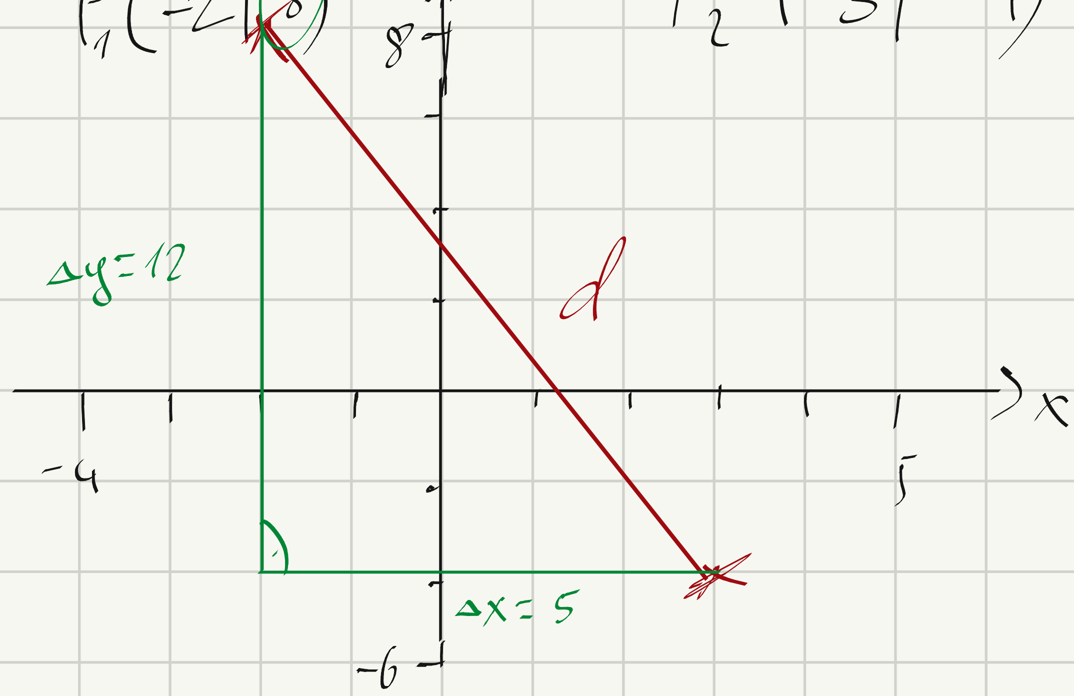
$\overline{AC}$

$\overline{BC}$



Abstände in der Ebene:

$P_1(-2|8)$ $P_2(3|-4)$



$d^2 = 5^2 + 12^2$

$d^2 = 25 + 144$

$d^2 = 169 \quad | \sqrt{\ }$

$d = 13$

$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \quad | \sqrt{\ }$

$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

b)

$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-3)^2 + (4-2)^2} = 3$

$|AC| = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-3)^2 + (3-2)^2} = 3$

$|BC| = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-2)^2 + (3-4)^2} \approx 4{,}24$

$\Rightarrow$ Da $|AB| = |AC|$, ist das Dreieck tatsächlich gleichschenklig!

Abstände im Raum:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

S.50 **Übung 16 Punktabstand**

Berechnen Sie den Abstand der Punkte A und B.

a) A(4|2), B(10|10)

b) A(1|−1|2), B(4|5|8)

c) A(−5|3|0), B(−1|7|7)

a) $d = \sqrt{(10-4)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

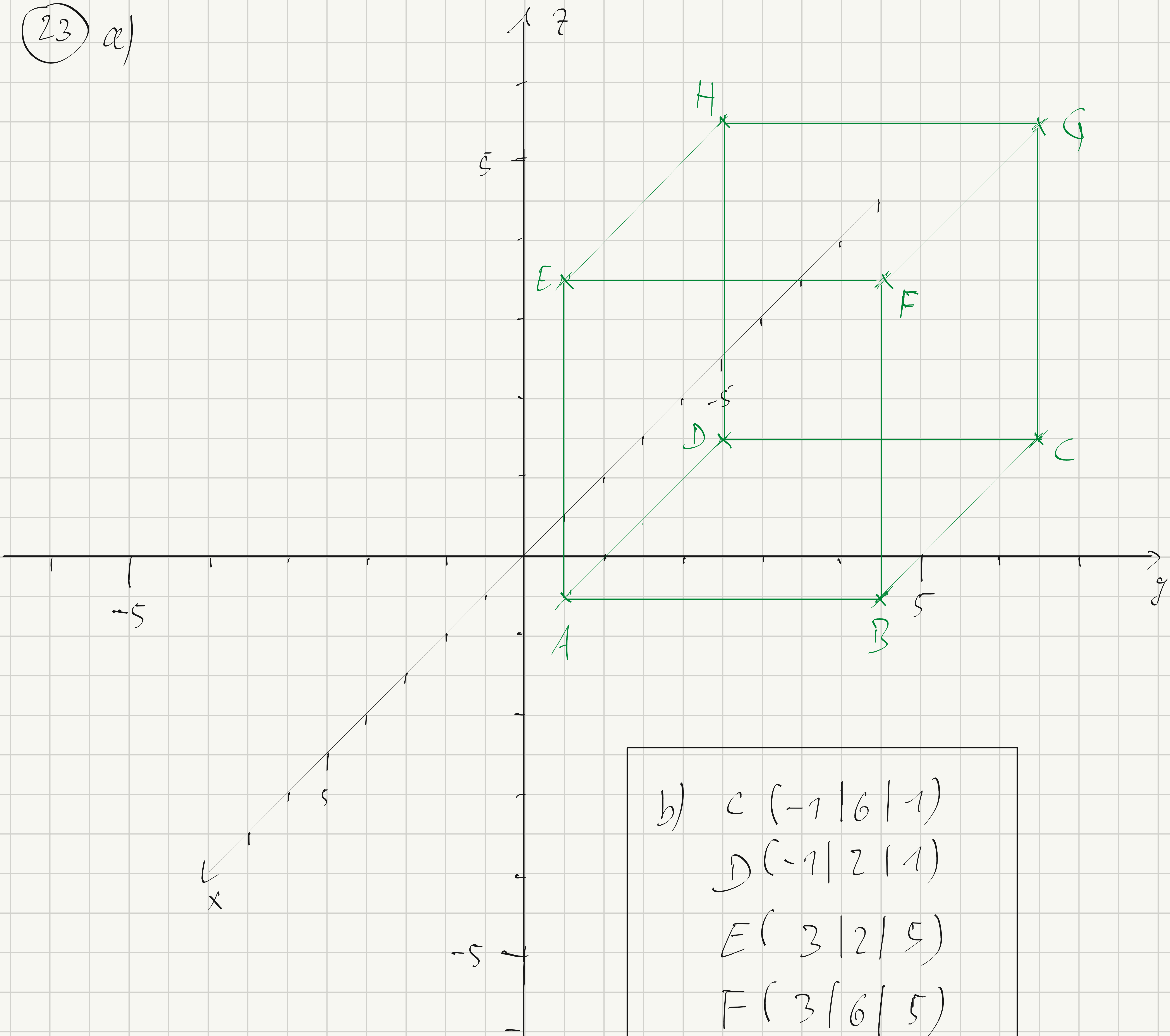
b) $d = \sqrt{(4-1)^2 + (5-(-1))^2 + (8-2)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = 9$

c) $d = \sqrt{(-1-(-5))^2 + (7-3)^2 + (7-0)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = 9$

23 a)



b) $C(-1|6|1)$
$D(-1|2|1)$
$E(3|2|5)$
$F(3|6|5)$
$H(-1|2|5)$

c) $M_1(1|6|3)$
$M(1|4|3)$

d) $\overline{BG} = \sqrt{(-1-3)^2+(6-6)^2+(5-1)^2} = \sqrt{(-4)^2+0+4^2} \approx \underline{\underline{5{,}66}}$

$\overline{AG} = \sqrt{(-1-3)^2+(6-2)^2+(5-1)^2} = \sqrt{(-4)^2+4^2+4^2} \approx \underline{\underline{6{,}93}}$

THEMEN KLASSENARBEIT NR 3

1) e-Funktionen (Anwendungsaufgabe)
   - Nullstellen
   - Extrempunkte
   - Flächen

- -

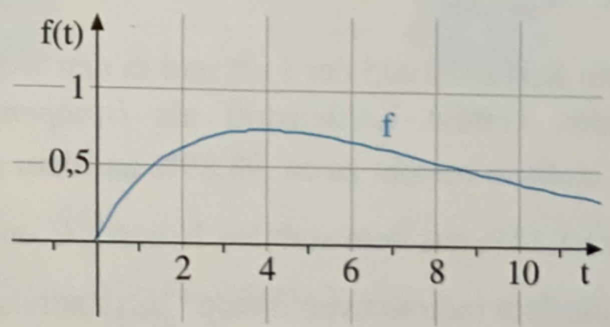
2) Gleichungssystem mit Gauß lösen

3) Textaufgaben zu Gleichungssystemen

4) Berechnungen im Raum (Q2-Buch S.53)

12. Elefantenbestand

In einem großen afrikanischen Nationalpark wird der Elefantenbestand kontrolliert und geschützt. Dadurch wächst die Population, die zum Zeitpunkt $t = 0$ bei 2500 Elefanten liegt, mit einer Wachstumsrate, welche durch die Funktion $f(t) = 0{,}5t \cdot e^{-0{,}25t}$ beschrieben wird.
($t \geq 0$: Zeit in Jahren, $f(t)$: Zuwachsrate in Tausend/Jahr)



a) Ermitteln Sie den Funktionswert von f an der Stelle $t = 10$. Erläutern Sie das Ergebnis.
b) Beschreiben Sie anhand des rechts dargestellten Graphen von f, wie sich die Elefantenpopulation entwickelt.
c) Wann wächst die Elefantenpopulation am stärksten?
d) Weisen Sie nach, dass die Funktion $F(t) = -2e^{-0{,}25t}(t+4)$ eine Stammfunktion von f ist.
~~e) Welche Funktion G(t) beschreibt den Bestand der Elefantenpopulation zum Zeitpunkt t?~~
~~f) Welche Maximalpopulation kann erreicht werden?~~

a) $f(10) = 0{,}5 \cdot 10 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 10}$

$f(10) \approx 0{,}41$

Antwort: Im Jahr Nr. 10 sind 410 Elefanten dazu gekommen.

e) Wie viele Elefanten kommen zwischen Jahr 2 und Jahr 10 dazu?

c) $\boxed{f(t) = 0{,}5t \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}}$

$f'(t) = 0{,}5 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} + 0{,}5t \cdot (-0{,}25) \cdot e^{-0{,}25t}$

$f'(t) = 0{,}5 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} - 0{,}5 \cdot t \cdot 0{,}25 \cdot e^{-0{,}25t}$

$f'(t) = 0{,}5 \cdot e^{-0{,}25t} - 0{,}25 \cdot t \cdot 0{,}5 \cdot e^{-0{,}25t}$

$f'(t) = (1 - 0{,}25t) \cdot 0{,}5 \cdot e^{-0{,}25t}$

$f'(t) = (0{,}5 - 0{,}125t) \cdot e^{-0{,}25t}$

$f''(t) = -0{,}125 \cdot e^{-0{,}25t} + (0{,}5 - 0{,}125t) \cdot (-0{,}25) \cdot e^{-0{,}25t}$

$f''(t) = -0{,}125 \cdot e^{-0{,}25t} - 0{,}125 e^{-0{,}25t} + \frac{1}{32} \cdot t e^{-0{,}25t}$

$f''(t) = (-0{,}125 - 0{,}125 + \frac{1}{32}t) \cdot e^{-0{,}25t}$

$f''(t) = (-0{,}25 + \frac{1}{32}t) \cdot e^{-0{,}25t}$

• notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$0 = (0{,}5 - 0{,}125t) \cdot \underbrace{e^{-0{,}25 \cdot t}}_{\text{niemals } = 0}$

daher:

$0 = 0{,}5 - 0{,}125t$

$0{,}125t = 0{,}5 \quad | :0{,}125$

$t = 4$

• hinr.-Bed.: $f''(x) = 0$

$f''(4) = (-0{,}25 + \frac{1}{32} \cdot 4) \cdot e^{-0{,}25 \cdot 4}$

$f''(4) \approx -0{,}04 \quad \Rightarrow \quad$ Max ☺

Antwort: Nach genau 4 Jahren war der Zuwachs an Elefanten maximal.

d) $F(t) = -2 \cdot (t+4) \cdot e^{-0{,}25t}$

$F(t) = (-2t - 8) \cdot e^{-0{,}25t}$

$F'(t) = f(t)$

$f(t) = -2 \cdot e^{-0{,}25t} + (-2t - 8) \cdot (-0{,}25) \cdot e^{-0{,}25t}$

$f(t) = -2 \cdot e^{-0{,}25t} + (0{,}5t + 2) \cdot e^{-0{,}25t}$

$f(t) = \cancel{-2 \cdot e^{-0{,}25t}} + 0{,}5t \cdot e^{-0{,}25t} \cancel{+ 2 \cdot e^{-0{,}25t}}$

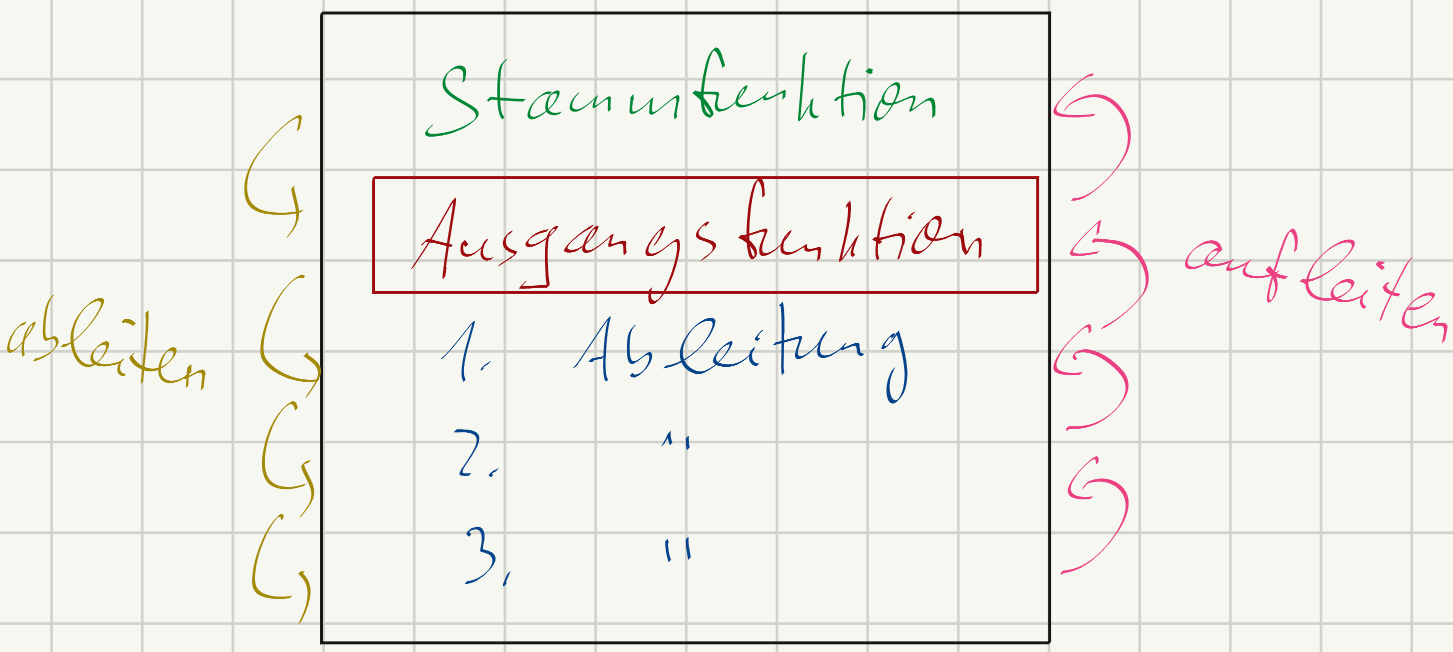
$f(t) = 0{,}5t \cdot e^{-0{,}25t}$ ✓

q. e. d.

e) $A = \int_2^8 (0{,}5t \cdot e^{-0{,}25 \cdot t})\ dx = \left[-2 \cdot e^{-0{,}25t} \cdot (t+4)\right]_2^8$

$= \left(-2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 8} \cdot (8+4)\right) - \left(-2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 2} \cdot (2+4)\right)$

$= (-3{,}248) - (-7{,}278) = 4{,}03 \quad \hat{=} \ \underline{4030}$

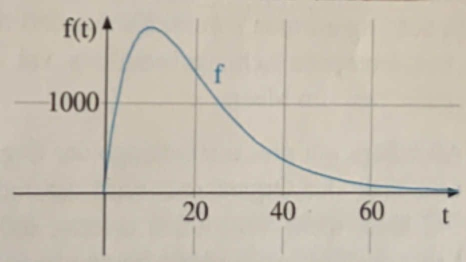


13. Fernsehshow

In einer Fernsehshow werden die Zuschauer dazu animiert, eine eingeblendete Telefonnummer anzurufen. Unter allen Anrufern wird ein Luxuswagen verlost.

Die Anrufrate der Zuschauer wird modellhaft durch $f(t) = 500t \cdot e^{-0{,}1t}$ beschrieben. ($t \geq 0$: Minuten, $f(t)$: Anrufe/min)

Der Graph von f ist rechts dargestellt.



a) Bestimmen und interpretieren Sie $f(5)$.

b) Ermitteln Sie die maximale Anrufrate.

c) Um die nach einiger Zeit fallende Anrufrate wieder zu steigern, wird erwogen, die Zuschauer erneut zum Anrufen aufzufordern, wenn die Anrufrate auf die Hälfte ihres Maximalwertes gefallen ist. Ermitteln Sie näherungsweise, wann das der Fall ist.

d) Alternativ wird erwogen, die Zuschauer erneut zum Anrufen aufzufordern, wenn die Anrufrate am stärksten fällt. Ermitteln Sie den geeigneten Zeitpunkt.

e) Weisen Sie nach, dass $F(t) = -5000 \cdot e^{-0{,}1t}(t+10)$ eine Stammfunktion von f ist. Ermitteln Sie die Gesamtzahl der eingehenden Anrufe in der ersten *Stunde* nach der Aufforderung zum Anrufen.

$$f(t) = \underbrace{500t}_{u} \cdot \underbrace{e^{-0{,}1 \cdot t}}_{v}$$

$$\boxed{f'(t) = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

$$f'(t) = 500 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} + 500t \cdot (-0{,}1) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$$

$$f'(t) = 500 \cdot e^{-0{,}1t} - 50t \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$$

$$f'(t) = (500 - 50t) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$$

$$f''(t) = -50 \cdot e^{-0{,}1t} + (500 - 50t) \cdot (-0{,}1) \cdot e^{-0{,}1t}$$

$$f''(t) = -50 \cdot e^{-0{,}1t} - 50 \cdot e^{-0{,}1t} + 5t \cdot e^{-0{,}1t}$$

$$f''(t) = (-50 - 50 + 5t) \cdot e^{-0{,}1t}$$

$$f''(t) = (-100 + 5t) \cdot e^{-0{,}1t}$$

<u>notw. Bed:</u> $f''(t) = 0$

$$0 = (-100 + 5t) \cdot e^{-0{,}1t}$$ wird nie $= 0$

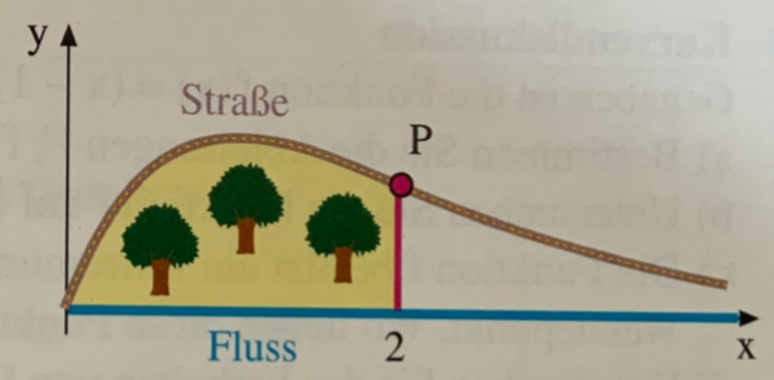
also: $0 = -100 + 5t \quad | +100$

$100 = 5t \quad | :5$

$\underline{20 = t}$

Beispiel: Flächeninhalt

Die Straße $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, der Fluss längs der x-Achse und der vertikale Verbindungsweg vom Punkt P zum Fluss begrenzen ein Grundstück, das mit Obstbäumen bepflanzt werden soll (1 LE = 100 m).
Ein Obstbaum benötigt $20\,m^2$. Wie viele Bäume können gepflanzt werden? Zeigen Sie zunächst, dass $F(x) = (-1-x) \cdot e^{1-x}$ eine Stammfunktion von f ist.



Lösung:

13. Pfeile eines Vektors

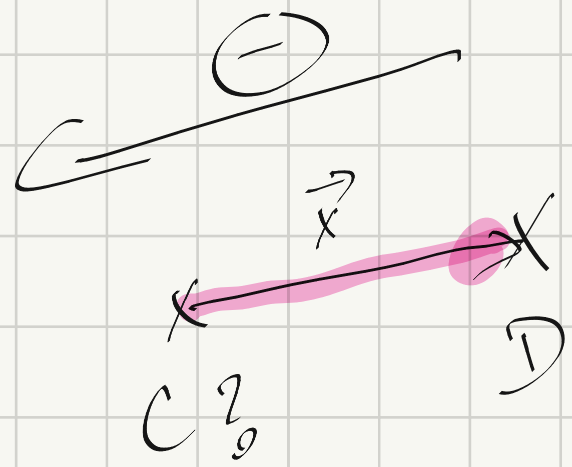
Die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sollen zum gleichen Vektor gehören. Bestimmen Sie die Koordinaten des jeweils fehlenden Punktes.

a) A(−3|4), B(5|−7), D(8|11)
b) A(3|2), C(8|−7), D(11|15)
c) B(3|8), C(3|−2), D(8|5)
d) A(3|a), B(2|b), C(4|3)
e) A(−3|5|−2), C(1|−4|2), D(3|3|3)
f) A(3|3|4), B(−1|4|0), D(2|1|8)
g) A(1|8|−7), B(0|0|0), D(3|3|7)
h) A(a|a|a), B(a + 1|a + 2|3), D(a|2|a − 1)

x x

A B

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5-(-3) \\ -7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix}$



$D - \vec{x} = C$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \end{pmatrix}$

C(0|22)

---

10. Berechnen Sie den Wert der Variablen x, sofern eine Lösung existiert.

a) $x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ x \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 10 \\ x+2 \end{pmatrix}$

d) $x \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6x \\ 18 \\ 2x \end{pmatrix}$

a) $x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{aligned} 3x &= -6 \quad |:3 \\ x &= -2 \end{aligned}}$

$5 \cdot (-2) \overset{!}{=} -10$
$-10 = -10$ ✓

$1 \cdot (-2) \overset{!}{=} 2$
$-2 = 2$ ↯

$\mathbb{L} = \{\}$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ x \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 10 \\ x+2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ x \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 10 \\ x+2 \end{pmatrix}$

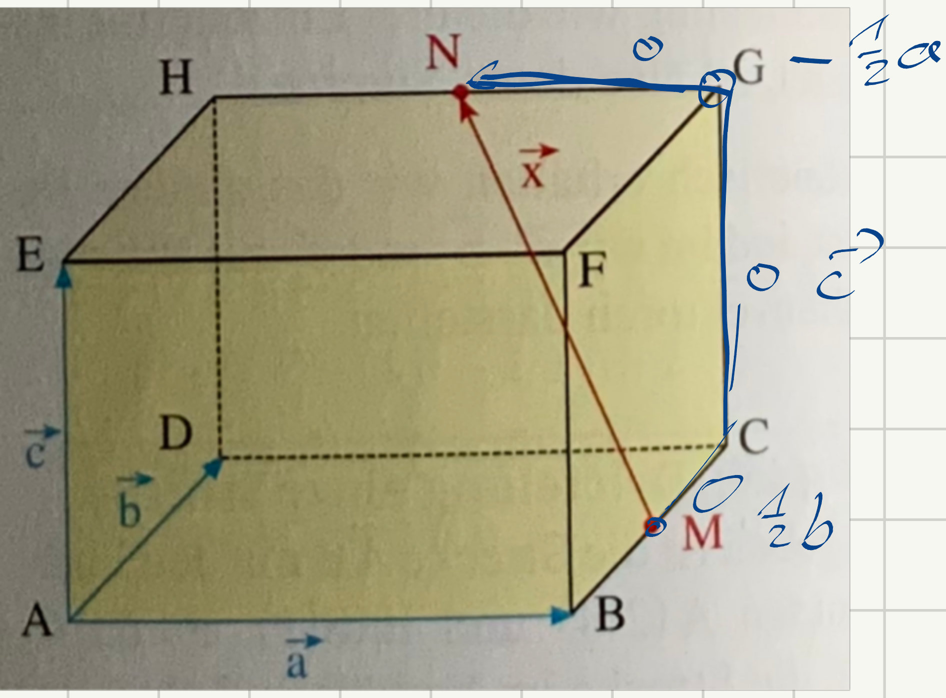
$4 + 2 = x$
$6 = x$

$x + 4 = 10$
$6 + 4 = 10$ ✓ :)

$2 + 6 = x + 2$
$2 + 6 = 6 + 2$
$8 = 8$ ✓ :)

$\mathbb{L} = \{6\}$

Übung 13 Vektoren im Quader
Der abgebildete Quader wird durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt. Der Vektor $\vec{x}$ verbindet die Mittelpunkte M und N zweier Quaderkanten.
Stellen Sie den Vektor $\vec{x}$ mit Hilfe der aufspannenden Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.



$$\vec{x} = \frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

Beispiel: Darstellung eines Vektors als Linearkombination (LK)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ sowie $\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{c}$ als LK von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{d}$ **nicht** als LK von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann.

a)

Lösung zu a:

Ansatz: $\underset{\vec{c}}{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}} = r \cdot \underset{\vec{a}}{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}} + s \cdot \underset{\vec{b}}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}$

Gl.-system:
I $2r + s = 3$
II $r + s = 1$
III $r + 2s = 0$

$r \cdot 2 + s \cdot 1 = 3$
$r \cdot 1 + s \cdot 1 = 1$
$r \cdot 1 + s \cdot 2 = 0$

Lösungsversuch:
IV I−II: $r = 2$
V IV in I: $s = -1$

Überprüfung: IV, V in III: $0 = 0$ ist wahr

Ergebnis:
$r = 2$, $s = -1$

$\vec{c}$ ist als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$2r + s = 3$$
$$- \quad r + s = 1$$
$$r = 2$$

$$2 + s = 1 \quad | -2$$
$$s = -1$$

$$r + 2s \stackrel{!}{=} 0$$
$$2 + 2 \cdot (-1) = 0$$
$$2 + (-2) = 0$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

$\Rightarrow$ $\vec{c}$ ist als LK von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellbar

b) Prüfen, ob $\vec{d}$ LK von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l} 3 = 2r + s \\ 1 = r + s \\ 1 = r + 2s \end{array}\right|$$

$$\ominus \left|\begin{array}{l} 3 = 2r + s \\ 1 = r + s \end{array}\right|$$

$$\underline{\underline{2 = r}}$$

$$1 = 2 + s \quad |-2$$

$$\underline{\underline{-1 = s}}$$

$$1 = r + 2s$$

$$1 = 2 + 2\cdot(-1)$$

$$1 = 2 - 2$$

$$1 = 0 \quad \lightning$$

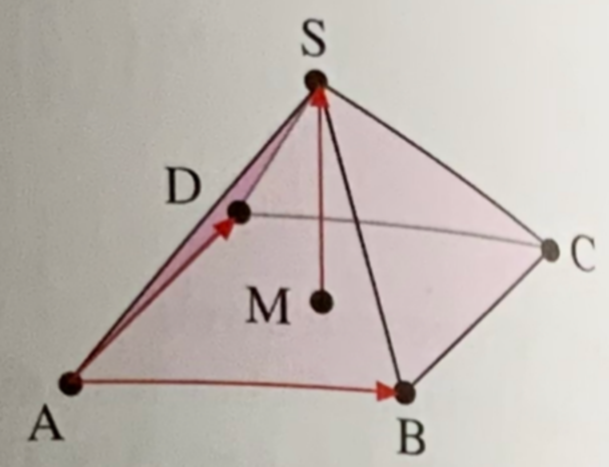
$\Rightarrow$ $\vec{d}$ ist keine LK aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Übungen

19. Stellen Sie den angegebenen Vektor als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.
$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{MS}$

a) $\overrightarrow{AS}$ b) $\overrightarrow{BS}$

c) $\overrightarrow{SC}$ d) $\overrightarrow{BD}$



23. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sowie $\vec{d} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nicht komplanar sind.

b) Stellen Sie die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

DAS SKALARPRODUKT:

S. 76

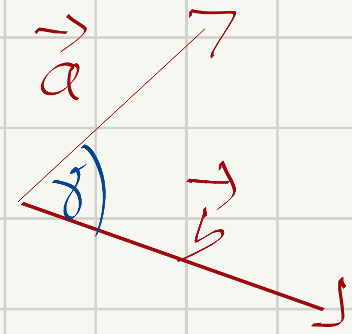
2

a)

Kosinusform:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$

$|\vec{a}| = 5{,}6$



$|\vec{b}| = 4{,}6$

$\gamma = 72°$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5{,}6 \cdot 4{,}6 \cdot \cos(72) \approx \underline{\underline{7{,}96}}$

$|\vec{a}| = 5$

$|\vec{b}| = 6{,}4$

$\gamma = 88°$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 6{,}4 \cdot \cos(88) \approx \underline{\underline{1{,}12}}$

$|\vec{a}| = 4{,}6$

$|\vec{b}| = 5$

$\gamma = 117°$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4{,}6 \cdot 5 \cdot \cos(117) \approx \underline{\underline{-10{,}44}}$

b)

Koordinatenform

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = \underline{\underline{8}}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot 5 + (-4) \cdot (-4) = \underline{\underline{1}}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 5 + -4 \cdot 0 = \underline{\underline{-10}}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

(6)

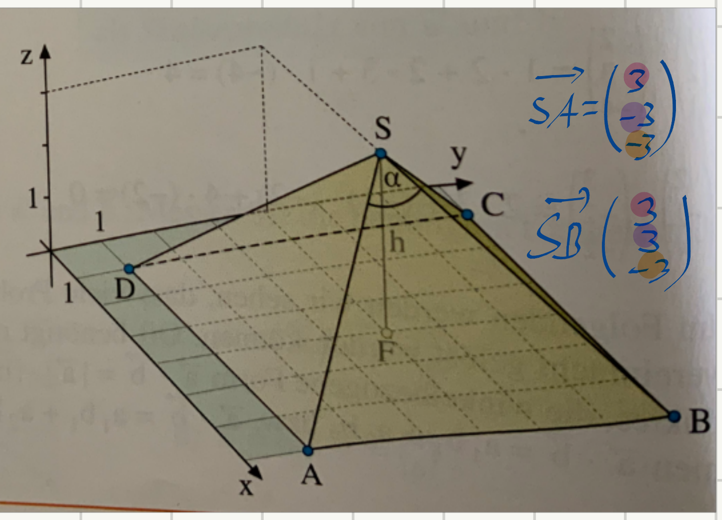
b)

S. 76

6. Die Abbildung zeigt eine gerade quadratische Pyramide mit den Seitenlängen $|\overline{AB}| = 6$, $|\overline{BC}| = 6$ sowie der Höhe h = 3.

a) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BS}$.

b) Errechnen Sie das Skalarprodukt $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$. Errechnen Sie die Längen $|\overrightarrow{SA}|$ und $|\overrightarrow{SB}|$. Können Sie nun den Winkel $\alpha = \sphericalangle ASB$ bestimmen?



$\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{SB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Koordinatenform: $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 3 \cdot 3 + (-3) \cdot 3 + (-3) \cdot (-3)$

$= 9 + (-9) + 9 \quad = 9$

Kosinusform: $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = |\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SB}| \cdot \cos(\alpha)$

$|\overrightarrow{SA}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{27}$

$|\overrightarrow{SB}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{27}$

$= \sqrt{27} \cdot \sqrt{27} \cdot \cos(\alpha)$

Koordinatenform
↓
$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$
↙
Kosinusform

$9 = \sqrt{27} \cdot \sqrt{27} \cdot \cos(\alpha)$

$9 = (\sqrt{27})^2 \cdot \cos(\alpha)$

$9 = 27 \cdot \cos(\alpha) \quad | :27$

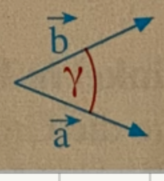
$\frac{1}{3} = \cos(\alpha) \quad | \cos^{-1}$

$70{,}53° \approx \alpha$

Die Kosinusformel

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien vom Nullvektor verschiedene Vektoren und γ sei der Winkel zwischen ihnen. Dann gilt:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{4\cdot7 + 5\cdot5 + 3\cdot1}{\sqrt{4^2+5^2+3^2}\cdot\sqrt{7^2+5^2+1^2}}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{56}{25\cdot\sqrt{6}}$$

$$\cos(\gamma) \approx 0{,}9145 \quad \Big|\ \cos^{-1}$$

$$\underline{\underline{\gamma = 23{,}87^\circ}}$$

S. 81

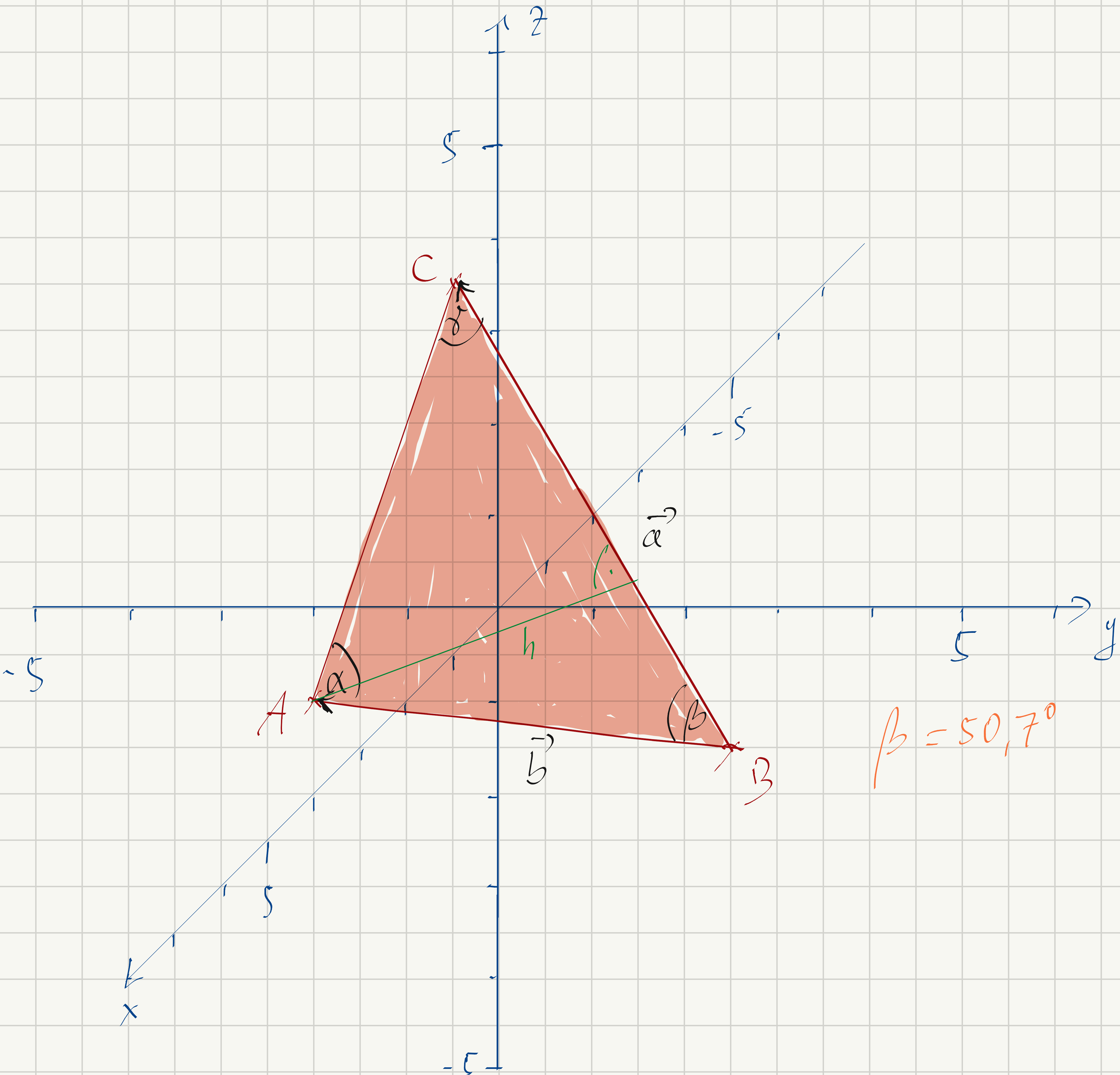
9. Winkel und Fläche eines Dreiecks

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (6|1|2), B (5|5|1) und C (1|0|4).

a) Fertigen Sie ein Schrägbild des Dreiecks an und berechnen Sie seine Innenwinkel.

b) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABC?

a)



$\beta = 50{,}7°$

α:

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 0-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{AC}| = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{30}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ 5-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2} = 3\cdot\sqrt{2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{(-5)\cdot(-1) + (-1)\cdot 4 + 2\cdot(-1)}{\sqrt{30}\cdot 3\sqrt{2}}$$

$$\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{15}}{90} \qquad |\cos^{-1}$$

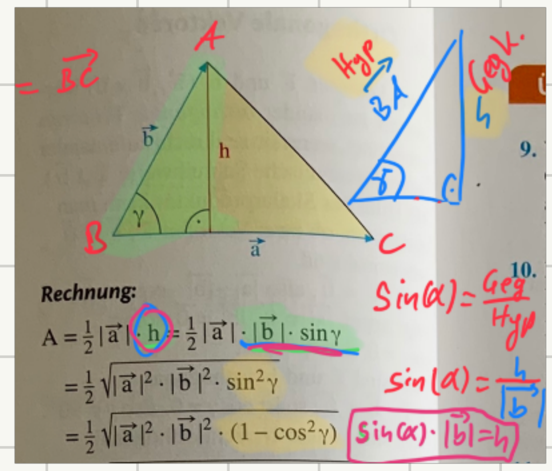
$$\alpha \approx 92{,}47°$$

β:

$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 6-5 \\ 1-5 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{BA}| = \sqrt{1^2+(-4)^2+1^2} = \underline{\underline{3\cdot\sqrt{2}}} \approx 4{,}24$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 0-5 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad |\vec{BC}| \sqrt{(-4)^2+(-5)^2+3^2} = \underline{\underline{5\cdot\sqrt{2}}} \approx 7{,}07$$

$$\cos(\beta) = \frac{1\cdot(-4) + (-4)\cdot(-5) + 1\cdot 3}{3\cdot\sqrt{2}\cdot 5\cdot\sqrt{2}}$$



$$\cos(\beta) = \frac{19}{30} \qquad \Big|\cos^{-1}$$

$$\underline{\underline{\beta \approx 50{,}7^\circ}}$$

γ:

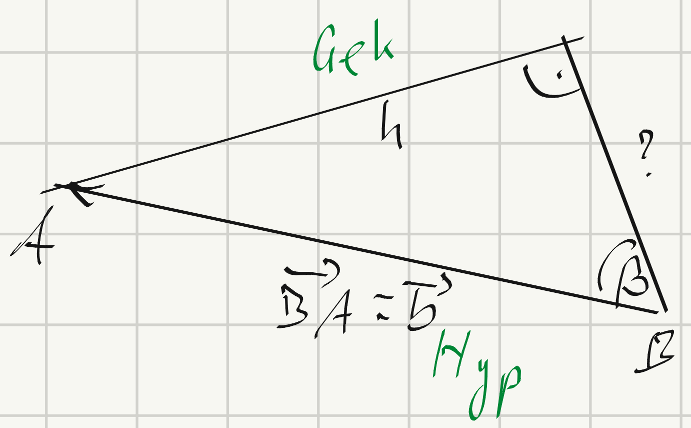
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 92{,}47^\circ - 50{,}7^\circ = \underline{\underline{36{,}83^\circ}}$$

---

b)

$$A = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h$$
$$= \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot h$$

$A(6|1|2)$
$B(5|5|1)$
$C(1|0|4)$



$$\sin(\beta) = \frac{Gek}{Hyp}$$

$$\sin(\beta) = \frac{h}{|\vec{BA}|} \quad \Big|\cdot|\vec{BA}|$$

$$|\vec{BA}|\cdot\sin(\beta) = h$$

$$|\vec{b}|\cdot\sin(\beta) = h$$

$$\vec{a} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 0-5 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \vec{BA} = \begin{pmatrix} 6-5 \\ 1-5 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = 50{,}7^\circ$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\beta)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2+(-5)^2+3^2} = \underline{\underline{5\cdot\sqrt{2}}} \approx 7{,}07$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2+(-4)^2+1^2} = \underline{\underline{3\cdot\sqrt{2}}} \approx 4{,}24$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(50{,}7) \approx \underline{\underline{11{,}6\ (FE)}}$$

11. Rechtwinkliges Dreieck

Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes C so, dass das Dreieck ABC mit A (1|1) und B (4|5) rechtwinklig und gleichschenklig ist.