

Mängel Bücher:

Schneider, Klara: Wasserschaden unten + unten verknickt

Kourtoubi, Douaa; etliche Seiten von oben eingerissen

Schmidt, Laura: Ecken etwas verknickt

Viertel, Paulina: Kaffeeleck unten rechts

Lautenschläger, Max: Buch unten links aufgequollen (Wasserschaden)

Jochum, Nils: loch auf Seite 1

Bartoumi, Mariam: Dellen in Buchcover, Ecken leicht verknickt

Lamrabet, Hajar: Ränder Cover und Rückseite stark verknickt

Höhn, Jonas: Buchcover beschnutzt, leichte Vergilbung am unteren Rand

Bräunlich, Silas: Wasserschaden oben - oben rechts + erste Seiten stark beschädigt

① $f(x) = \frac{2}{5}x - 3$

② a) Differenzenquotient: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{-\frac{3}{8} - 2}{8,2 - \frac{1}{4}} \\ = -\frac{95}{318} \approx \underline{\underline{-0,3}}$$

$$P\left(\frac{1}{4} \mid 2\right)$$

$$Q\left(8,2 \mid -\frac{3}{8}\right)$$

$$f(x) = m \cdot x + b$$

$$2 = -0,3 \cdot 0,25 + b$$

$$2 = -\frac{3}{40} + b$$

$$\mid + \frac{3}{40}$$

$$\underline{\underline{\frac{83}{40} = 2,075 = b}}$$

$$\underline{\underline{f(x) = -0,3x + 2,075}}$$

b) Schnittp. mit x-Achse: -3 | $N(-3|0)$
" " y-Achse: 9 | $S_y(0|9)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 0}{0 - (-3)} = \frac{9}{3} = \underline{\underline{3}}$$

$$b = 9$$

$$\underline{\underline{f(x) = 3x + 9}}$$

(3) a) $p(9|-3)$

$$f(x) = \frac{1}{3}x - 6$$

$$-3 = \frac{1}{3} \cdot 9 - 6$$

$$-3 = 3 - 6$$

$$-3 = -3 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow p$ liegt auf
der Geraden
von $f(x)$.

$$b) \quad Z(3 \cdot u \mid 5)$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x - 6$$

$$5 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot u - 6$$

$$5 = 1u - 6 \quad | +6$$

$$11 = u$$

$\Rightarrow$ Für eine Wahl von $u = 11$ liegt Z auf der Geraden von $f(x)$.

c) Schnittpunkt mit

x-Achse $\boxed{y=0}$

$$0 = \frac{1}{3}x - 6 \quad | +6$$

$$6 = \frac{1}{3}x \quad | : \frac{1}{3}$$

$$18 = x$$

N(18|0)

y-Achse $\boxed{x=0}$

$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0 - 6$$

$$f(0) = 0 - 6$$

$$f(0) = -6$$

S_y(0|-6)

$$\begin{aligned}
 d) \quad -\frac{1}{3}x - 4 &= \frac{1}{3}x - 6 & | +\frac{1}{3}x \\
 -4 &= \frac{2}{3}x - 6 & | +6 \\
 2 &= \frac{2}{3}x & | : \frac{2}{3} \\
 3 &= x
 \end{aligned}$$

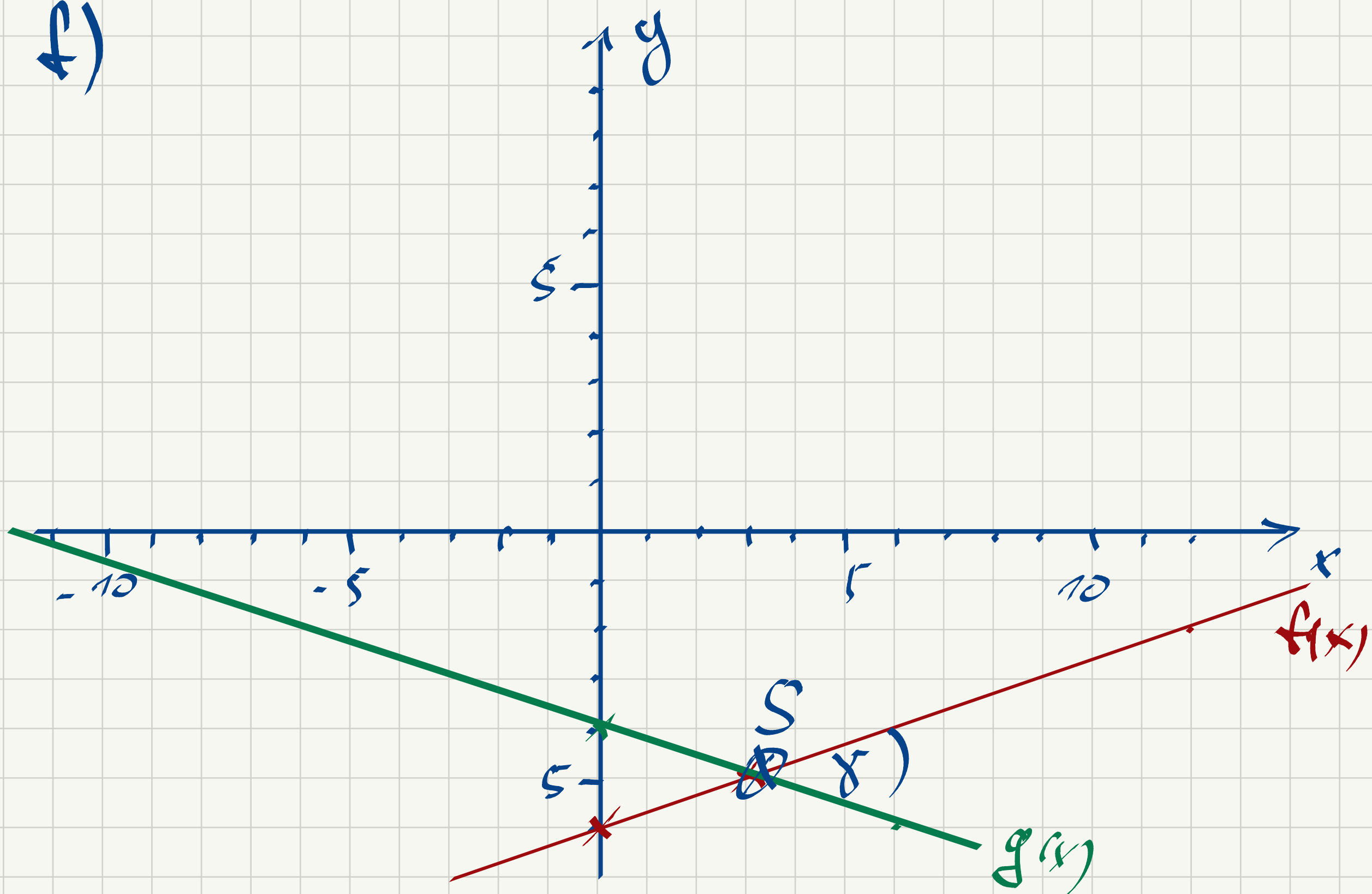
$$\begin{aligned}
 g(3) &= -\frac{1}{3} \cdot 3 - 4 \\
 g(3) &= -1 - 4 \\
 g(3) &= -5
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{S(3|-5)}}$$

e) Steigungswinkel α $\tan^{-1}(\frac{1}{3}) : \alpha \approx 18,4^\circ$
 Steigungswinkel β $\tan^{-1}(-\frac{1}{3}) : \beta \approx -18,4^\circ$

Schnittwinkel: $\gamma = \alpha - \beta = 18,4^\circ - (-18,4^\circ)$
 $= \underline{\underline{36,8^\circ}}$

f)



④

a)

$$f(x) = 12,5x + 50$$

b)

$$f(x) = 140$$

$$\begin{aligned} 140 &= 12,5x + 50 & | -50 \\ 90 &= 12,5x & | : 12,5 \\ 7,2 &= x \end{aligned}$$

Antwort: In etwas mehr als 7 Tagen muss der Haufen abgefahren werden.

c)

$$f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= 12,5x + 50 & | -50 \\ -50 &= 12,5x & | : 12,5 \\ -4 &= x \end{aligned}$$

Antwort: Vor genau 4 Tagen wurde Harlen zum letzten Mal abgefahren.

Code Korell

1) Um welche bei den Größen geht es?
Gramm Worten

2) Welche Größe hängt von welcher Größe ab?

unabhängige Größe (x): Worten
abhängige Größe (y): Gramm

3) Welche Infos liefert der Text?

I) "pro" "je" "täglich" (m) 4 ⊕

II) "Wert zu Beginn" "Startwert"
Grundgebühr" ... (b) ⊖ ?

III) "Bei [Größe 1] waren es [Größe 2]"

Punkt

(was ist x - was ist y?)

Textaufgaben: (siehe Blatt)

$$f(x) = m \cdot x + b$$

$$\textcircled{1} \quad b = 1800$$

$$m = -350$$

a) $\overset{\text{Gramm}}{\rightarrow} f(x) = -350x + 1800 \quad \swarrow \text{Wochen}$

b) Kaffee aufgebraucht: $f(x) = 0$

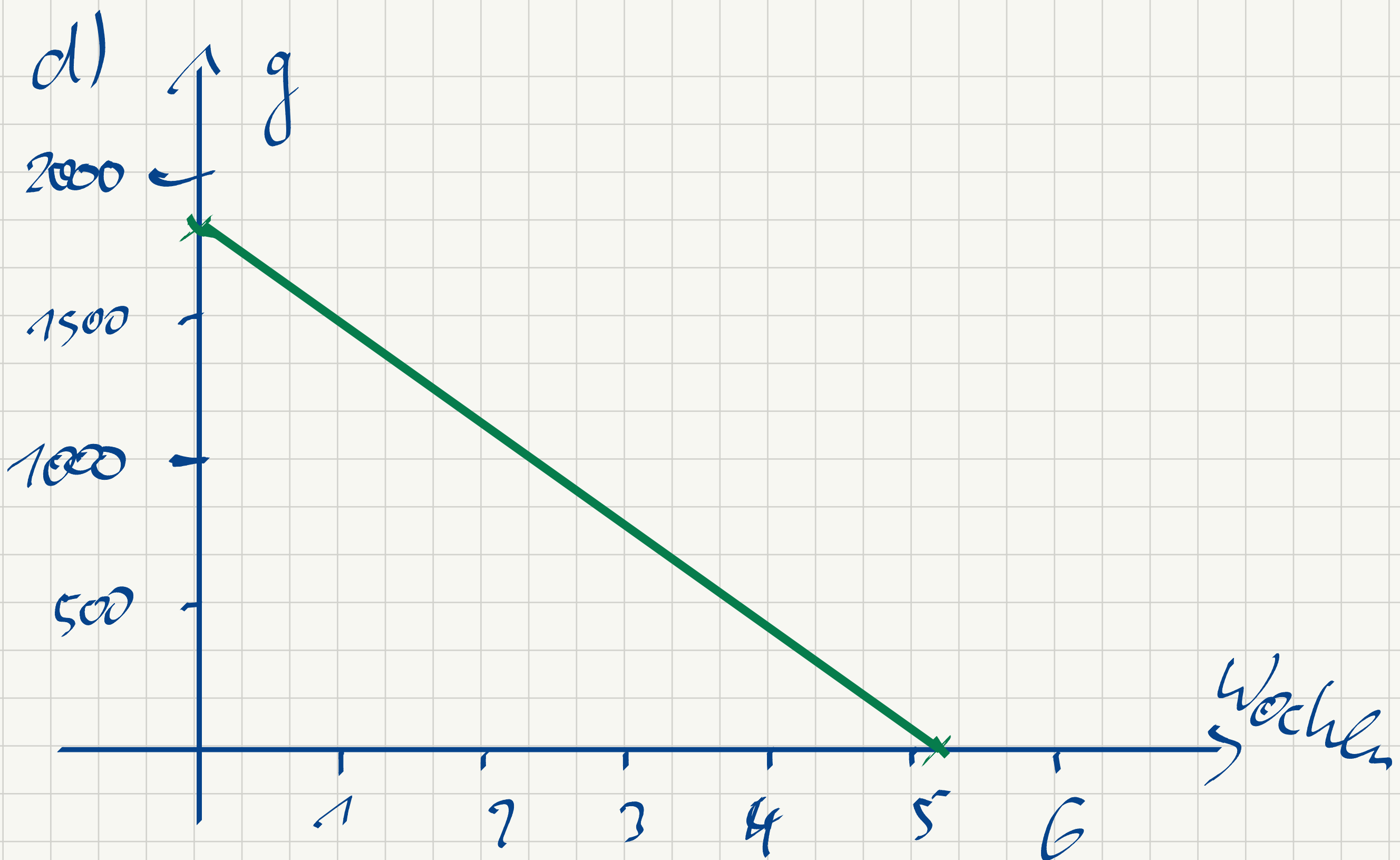
$$\begin{array}{rcl} 0 & = & -350x + 1800 \quad | -1800 \\ -1800 & = & -350x \quad | :(-350) \end{array}$$

$$5,14 \approx x$$

Antwort: Der Kaffeevorrat reicht etwas mehr als 5 Wochen

$$\begin{array}{rcl} \text{c) } 400 & = & -350x + 1800 \quad | -1800 \\ -1400 & = & -350x \quad | :(-350) \\ \underline{4} & = & x \end{array}$$

Antwort: Nach genau 4 Wochen muss nachbestellt werden.



3. Zur Versorgung der Futterautomaten im Streichelzoo "Koalabär" benötigt der Tierpfleger täglich 7,5 kg Tierfutter. Zwölf Tage, nachdem das Futterlager zum letzten Mal aufgefüllt wurde, befinden sich dort noch 250 kg.
- Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die diesen Sachverhalt beschreibt und zeichnen Sie den dazugehörigen Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
 - Auf welche Menge wurde das Futterlager vor zwölf Tagen aufgefüllt?
 - Bei einem Lagerbestand von 50 kg wird der Bestand wieder auf die unter b) berechnete Menge aufgestockt. Wann ist das erforderlich?
4. Der Telefondienst "Handybillig" (HB) bietet an:
Jede Gesprächsminute kostet 0,06 €, bei einer monatlichen Grundgebühr von 8,50 €.
Die Konditionen von "Handypreiswert" (HP) lauten:
Jede Gesprächsminute kostet 0,08 €, bei einer monatlichen Grundgebühr von 5 €.
(Fertigen Sie eine Skizze an)
- Bei wie viel Minuten sind die Kosten bei beiden gleich?
 - Ihnen stehen 25 € monatlich zum Telefonieren zur Verfügung (Oma zahlt).
Welchen Dienst wählen Sie und wie lange können Sie bei dem gewählten Anbieter telefonieren?
 - Stellen Sie die Ergebnisse von a) und b) im Koordinatensystem dar.

Lösungen auf den nachfolgenden Seiten.

③

a)

$$\begin{array}{l} x: \text{Tage} \\ y: \text{kg} \end{array}$$

$$m = -7,5$$

$$P(12/250)$$

$$g(x) = m \cdot x + b$$

$$250 = -7,5 \cdot 12 + b$$

$$250 = -90 + b \quad | +90$$

$$340 = b$$

$$\underline{\underline{g(x) = -7,5x + 340}}$$

b) (Das ist der eben errechnete "b"-Wert)

Antwort: Vor 12 Tagen wurde das Lager auf 340 kg aufgefüllt.

c) $y = 50$

$$50 = -7,5x + 340 \quad | -340$$

$$-290 = -7,5x$$

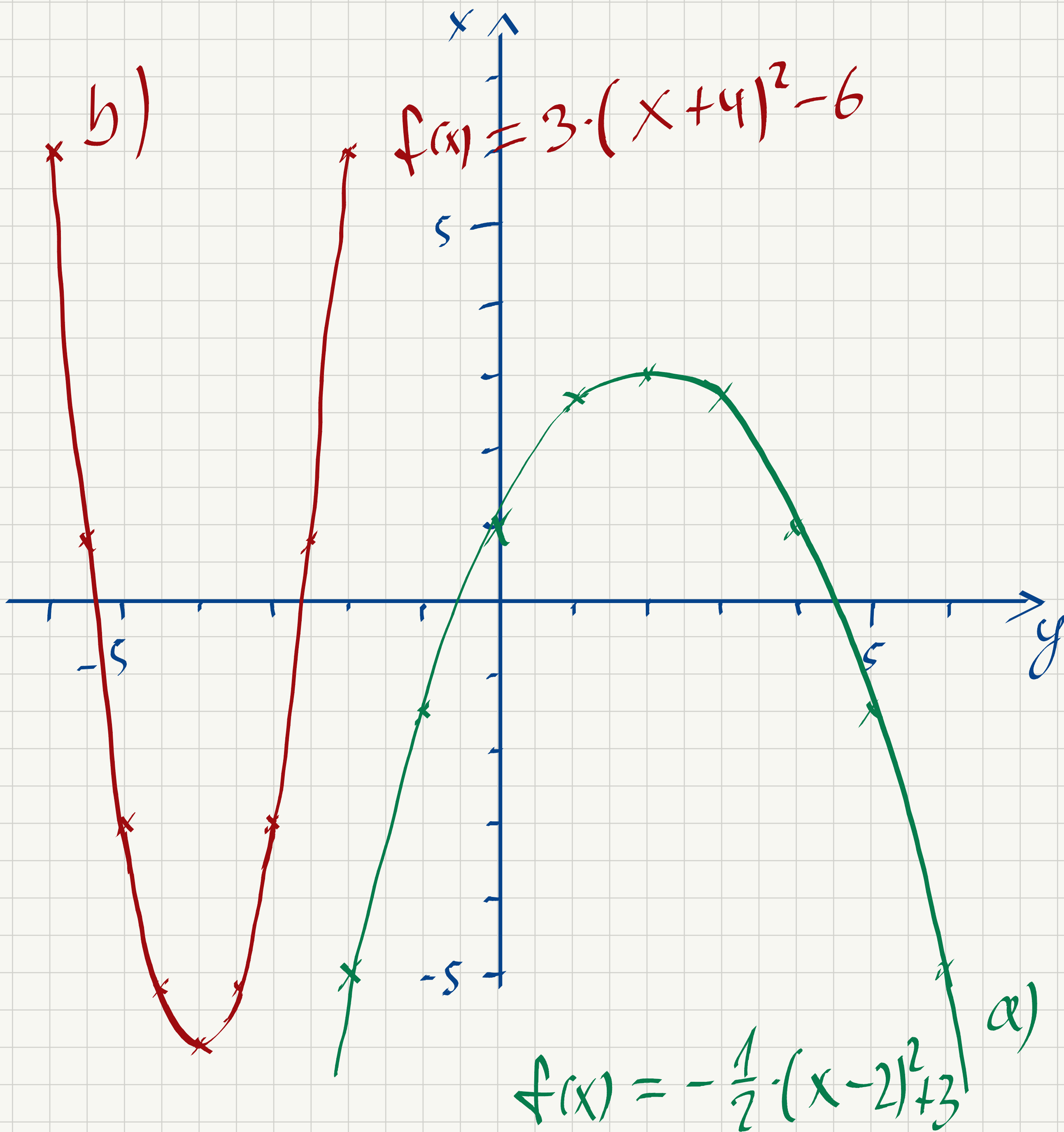
$$| :(-7,5)$$

$$\underline{\underline{38,67 = x}}$$

Antwort: Noch etwas mehr als $38 \frac{1}{2}$ Tagen muss nachbestellt werden.

Quadratische Funktionen

Zeichnen



3.4: Achsenschnittpunkte

↳ Nullstellen

$$\boxed{y=0}$$

Wenn Funktion in der SP-Form:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+4)^2 - 18$$

$$0 = \frac{1}{2} \cdot (x+4)^2 - 18 \quad | +18$$

$$18 = \frac{1}{2} \cdot (x+4)^2 \quad | : \frac{1}{2}$$

$$36 = (x+4)^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\pm 6 = x_{1/2} + 4 \quad | -4$$

$$-4 \pm 6 = x_{1/2}$$

$$2 = x_1$$

$$-10 = x_2$$

$$N_1(2|0)$$

$$N_2(-10|0)$$

Wenn Funktion in der allg. Form:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 10$$

$$\textcircled{1} = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 10 \quad | : \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} = x^2 + 8x - 20$$

p q

p-q-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1/2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (-20)}$$

$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16 + 20}$$

$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{36}$$

$$x_{1/2} = -4 \pm 6$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -10$$

Wenn Funktion in der
Linearfaktorzerlegung

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \cdot (x + 10)$$

$$0 = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \cdot (x + 10)$$

Vorzeichen
drehen

Vorzeichen
drehen

Nullstellen aus
Linearfaktoren
ablesbar:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -10$$

Die 6 Wege des Umformens

Weg 1: SP-Form in allg. Form:

SP-Form: $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x-3)^2 + 4$

$\downarrow$

$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x^2 - 6x + 9) + 4$

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1,5x - 2,25 + 4$

allg. Form: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1,5x + 1,75$

Weg 3: Von der Linearfakt.-D. in die allg. Form

Lin-Fakt.-Drst.: $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot [(x+1) \cdot (x-7)]$

$\downarrow$

$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x^2 - 7x + x - 7)$

$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x^2 - 6x - 7)$

allg. Form: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1,5x + 1,75$

Weg 5: SP-Form in Lin-Fakt.-Darst.

$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x-3)^2 + 4$

$0 = -\frac{1}{4} \cdot (x-3)^2 + 4 \quad | -4$

$-4 = -\frac{1}{4} \cdot (x-3)^2 \quad | :(-\frac{1}{4})$

$16 = (x-3)^2 \quad | \sqrt{}$

$\pm 4 = x_{1/2} - 3 \quad | +3$

$3 \pm 4 = x_{1/2}$

$7 = x_1$

$-1 = x_2 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x-7) \cdot (x+1)$

Weg 2: Von der allg. Form in die SP-Form:

allg. Form: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1,5x + 1,75$

mit dem WTR: SP(3|4)

SP-Form: $f(x) = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 4$

Weg 4: Von der allg. Form in die Linearfaktordarstellung:

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1,5x + 1,75$

$0 = -\frac{1}{4}x^2 + 1,5x + 1,75 \quad | :(-\frac{1}{4})$

$0 = x^2 - 6x - 7$

$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9+7}$

$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{16}$

$x_{1/2} = 3 \pm 4$

$x_1 = 7$

$x_2 = -1 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x-7) \cdot (x+1)$

Weg 6: Von der Lin-Fakt.-Form in die SP-Form:

$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x-7) \cdot (x+1)$

$n_1 = 7$

$n_2 = -1$

$x_{sp} = \frac{n_1 + n_2}{2} = \frac{7 + (-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$f(3) = -\frac{1}{4} \cdot (3-7) \cdot (3+1)$

$f(3) = 4$

SP(3|4)

$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x-3)^2 + 4$

Quadratische Funktion aus 3 gegebenen Punkten

$f(x) = \checkmark 2x^2 - \checkmark 4x + \checkmark 1$

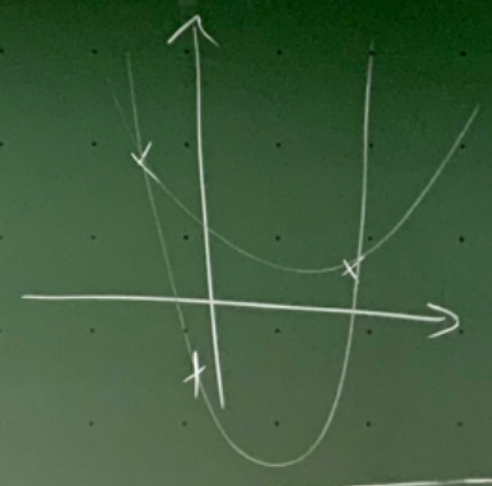
$f(x) = ax^2 + bx + c$

$P_1(2|1)$
 $P_2(-3|31)$
 $P_3(1|-1)$

$1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$	$1 = 4a + 2b + c$
$31 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c$	$31 = 9a - 3b + c \quad \cdot (-1)$
$-1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$	$-1 = a + b + c$

$1 = 4a + 2b + c$	$\rightarrow -30 = -5a + 5b \quad :(-4)$
$-31 = -9a + 3b - c$	$\rightarrow -32 = -8a + 4b \quad :5$
$-1 = a + b + c$	

$120 = 20a - 20b$	
$-160 = -40a + 20b$	
$-40 = -20a \quad :(-20)$	
$2 = a$	



mit $-30 = -5a + 5b$ und $a = 2$

$-30 = -5 \cdot 2 + 5b$

$-30 = -10 + 5b \quad | +10$

$-20 = 5b \quad | :5$

$-4 = b$

mit $-1 = a + b + c$ und $a = 2$ und $b = -4$

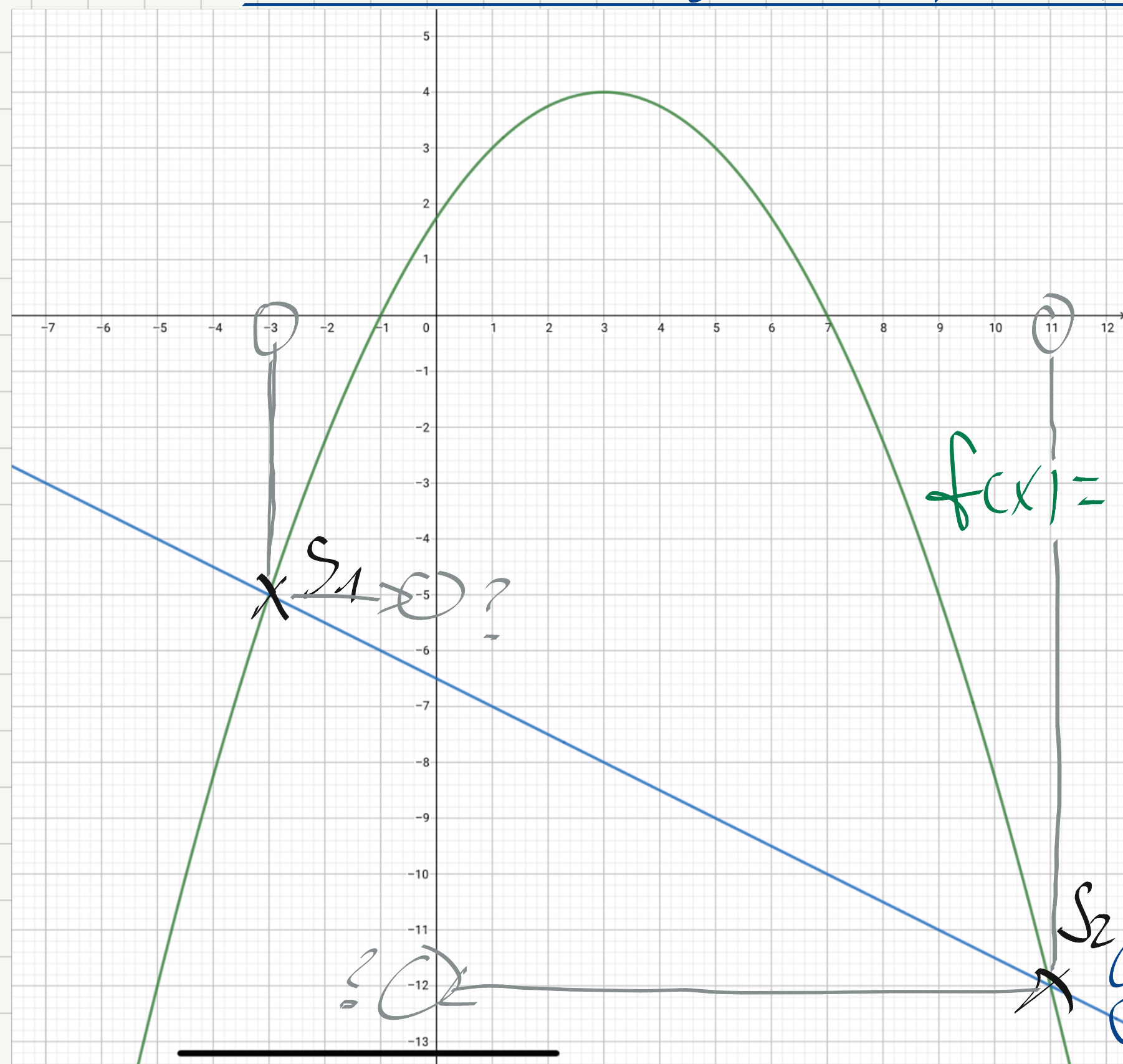
$-1 = 2 + (-4) + c$

$-1 = -2 + c \quad | +2$

$1 = c$

$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

3.6: Schnittpunkte zwischen Parabel & Gerade & deren Lagebeziehung



$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1,5x + 1,75$$

$$g(x) = -0,5x - 6,5$$

Schnittpunkte zwischen zwei
Funktionen $\Rightarrow$ GLEICHSETZEN

$$-\frac{1}{4}x^2 + 1,5x + 1,75 = -0,5x - 6,5$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4}x^2 + 1,5x + 1,75 &= -0,5x - 6,5 & | +6,5 \\
 -\frac{1}{4}x^2 + 1,5x + 8,25 &= -0,5x & | +0,5x \\
 -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 8,25 &= 0 & | : (-\frac{1}{4})
 \end{aligned}$$

$$x^2 - 8x - 33 = 0$$

p
q

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 + 33}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{49}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm 7$$

$$\underline{x_1 = -3}$$

$$\underline{x_2 = 11}$$

$$g(-3) = -0,5 \cdot (-3) - 6,5$$

$$g(-3) = -5$$

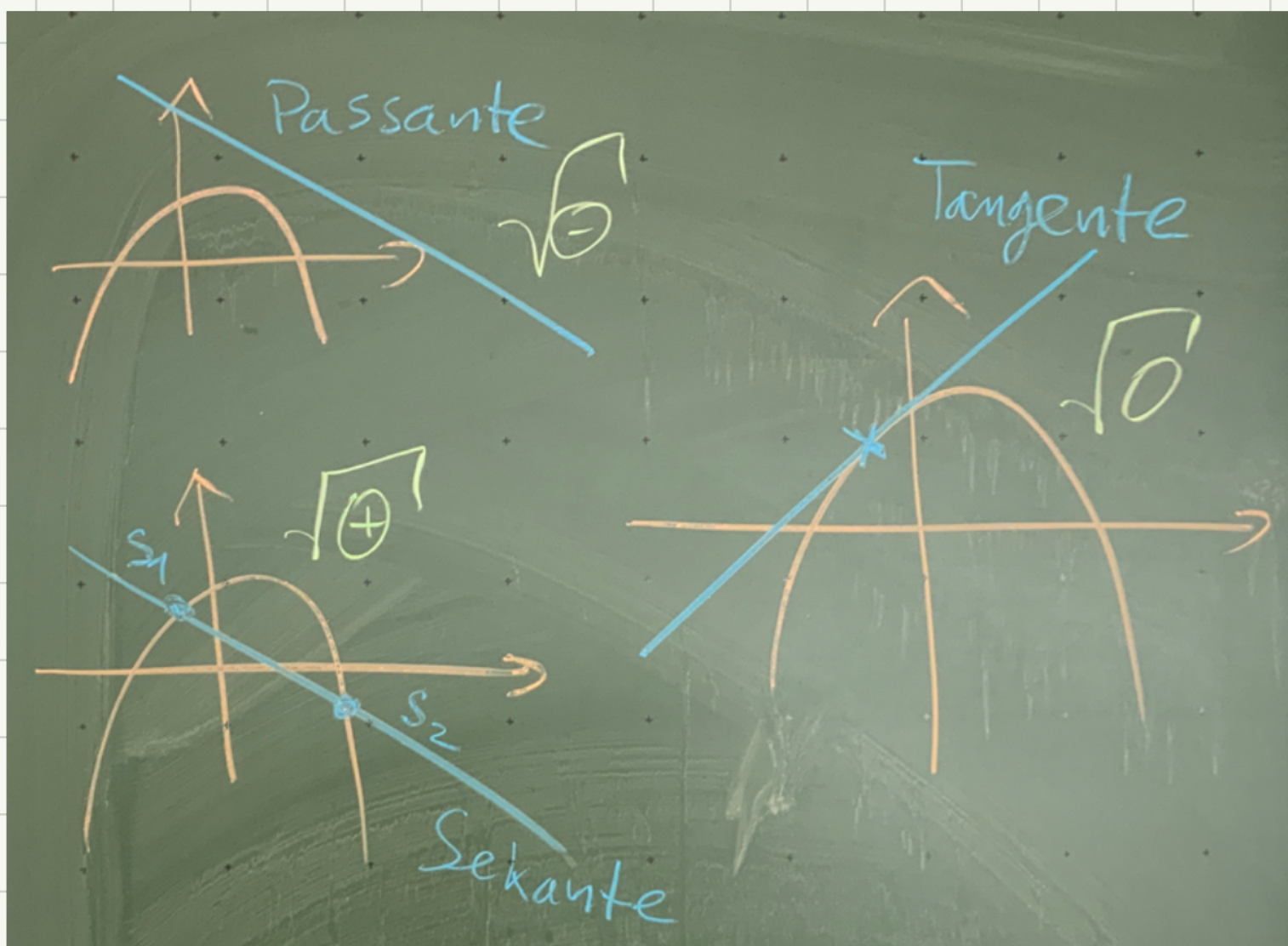
$$g(11) = -0,5 \cdot 11 - 6,5$$

$$g(11) = -12$$

damit:

$$\underline{S_1(-3 | -5)}$$

$$\underline{S_2(11 | -12)}$$



Für welche Wahl von „t“ ist die Gerade von g(x) eine...

a) ... Tangente zur Parabel von f(x)

b) ... Sekante zur Parabel von f(x)

c) ... Passante zur Parabel von f(x)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1,5x + 1,75$$

$$g(x) = -0,5x + t$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 1,5x + 1,75 = -0,5x + t \quad | +0,5x$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1,75 = t$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1,75 - t = 0$$

$$x^2 - 8x - 7 + 4t = 0$$

p q

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - (-7 + 4t)}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 + 7 - 4t}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{23 - 4t}$$

$$| :(-\frac{1}{4})$$

$$23 - 4t = 0 \quad | -23$$

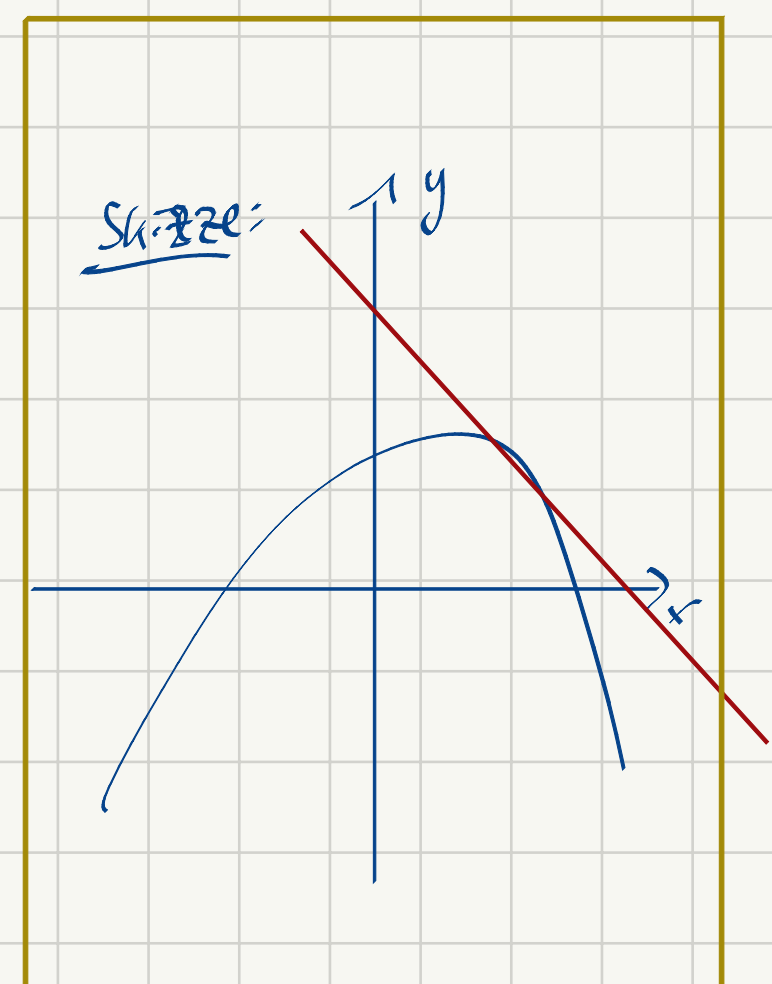
$$-4t = -23 \quad | :(-4)$$

$$t = 5,75$$

a) für $t = 5,75$ ist g(x) eine Tangente von f(x)

b) für $t < 5,75$ ist g(x) eine Sekante von f(x)

c) für $t > 5,75$ ist g(x) eine Passante von f(x)



Nullstellen von Potenzfunktionen:

1) $f(x) = -\frac{2}{3}x^6 + 8$
2) $f(x) = 2x^7 + 30$
3) $f(x) = \frac{2}{5}x^8 + 19$
4) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 7$
5) $f(x) = -5x^3 + 1$

1) $0 = -\frac{2}{3}x^6 + 8 \quad | -8$
 $-8 = -\frac{2}{3}x^6 \quad | :(-\frac{2}{3})$
 $12 = x^6 \quad | \sqrt[6]{}$
 $\underline{1,51 \approx x_1}$
 $\underline{-1,51 \approx x_2}$

2) $0 = 2x^7 + 30 \quad | -30$
 $-30 = 2x^7 \quad | :2$
 $-15 = x^7 \quad | \sqrt[7]{}$
 $\underline{\underline{-1,47 \approx x}}$

3) $0 = \frac{2}{5}x^8 + 19 \quad | -19$
 $-19 = \frac{2}{5}x^8 \quad | : \frac{2}{5}$
 $-\frac{95}{2} = x^8 \quad | \sqrt[8]{}$
 $\sqrt[8]{-\frac{95}{2}} = x$

u. d.
 $\Rightarrow$ es gibt keine
Nullstellen!

4) Dies ist keine
Potenzfunktion!
(machen wir
noch)

5) $0 = -5x^3 + 1 \quad | -1$
 $-1 = -5x^3 \quad | :(-5)$
 $\frac{1}{5} = x^3 \quad | \sqrt[3]{}$
 $\underline{\underline{0,58 \approx x}}$

Ganzrationale Funktionen:

allgemeines Bildungsgesetz:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Nullstellenberechnung:

Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion:

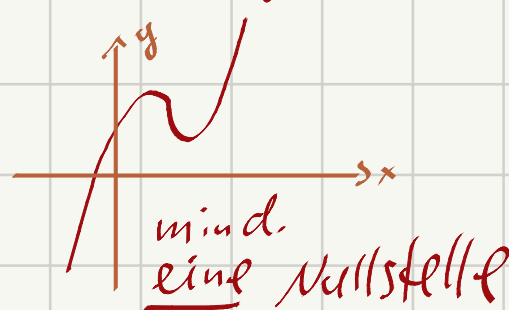
maximal:

Fundamentalsatz der Algebra:

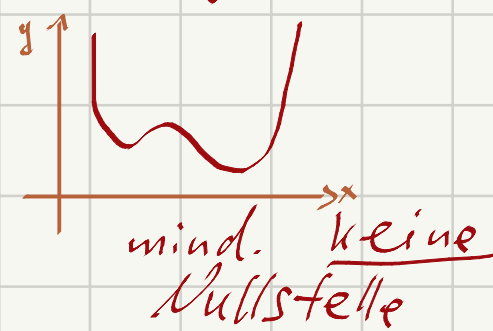
Eine Funktion hat maximal so viele Nullstellen, wie ihr Grad groß ist

minimal:

Grad ungerade



Grad gerade



Nullstellenberechnung bei ganzrationalen Funktionen:

Verfahren 1: "x ausklammern" (Geht nur, wenn das absolute Glied fehlt)

$$f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 18x$$

$$0 = -2x^3 + 4x^2 + 18x$$

$$0 = x \cdot (-2x^2 + 4x + 18) \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$$

Restproblem

$$0 = -2x^2 + 4x + 18 \quad | :(-2)$$

$$0 = x^2 - 2x - 9$$

$$x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{1+9}$$

$$x_{2/3} \approx 1 \pm 3,16$$

$$\underline{x_2 = 4,16}$$

$$\underline{x_3 = -2,16}$$

Beispielaufgaben:

1) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 10x$

$$0 = 2x^3 - 6x^2 - 10x$$

$$0 = x \cdot (2x^2 - 6x - 10) \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$$

$$0 = 2x^2 - 6x - 10 \quad | :2$$

$$0 = x^2 - 3x - 5$$

$$x_{2/3} = 1,5 \pm \sqrt{1,5^2 + 5}$$

$$x_{2/3} \approx 1,5 \pm 2,69$$

$$x_2 = 4,19$$

$$x_3 = -1,19$$

2) $f(x) = 4x^3 + 2x^2$

$$0 = 4x^3 + 2x^2$$

$$0 = x \cdot (4x^2 + 2x) \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$$

$$0 = 4x^2 + 2x$$

$$0 = x \cdot (4x + 2) \Rightarrow \underline{x_2 = 0}$$

$$0 = 4x + 2 \quad | -2$$

$$-2 = 4x \quad | :4$$

$$\underline{-0,5 = x_3}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 + 2x^2 \\ 0 &= x^2(4x + 2) \Rightarrow \underline{x_1 = x_2 = 0} \\ 0 &= 4x + 2 \quad | -2 \\ -2 &= 4x \quad | :4 \\ -0,5 &= x_3 \end{aligned}$$

oder

Verfahren 2: "Substitutionsverfahren"

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 8$$

$$0 = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 8$$

substituiere:

$$(\quad)^2 \begin{cases} x^2 = z \\ x^4 = z^2 \end{cases}$$

$$0 = -\frac{1}{2}z^2 + 2z + 8 \quad | :(-\frac{1}{2})$$

$$0 = z^2 - 4z - 16$$

$$z_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4+16}$$

$$z_{1/2} \approx 2 \pm 4,5$$

$$z_1 = 6,5$$

$$z_2 = -2,5$$

resubstituiere:

mit $x^2 = z$

für $z_1 = 6,5$

$$x^2 = 6,5 \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 \approx 2,55$$

$$x_2 \approx -2,55$$

für $z_2 = -2,5$

$$x^2 = -2,5 \quad | \sqrt{}$$

$$x_{3/4} = \sqrt{-2,5}$$

$$4 : 2 = 2$$

$$(x^2)^2 = x^4$$

(Geltet nur, wenn alle Exponenten ganzzahlige Vielfache von einander sind)

alternative Aufgabe

$$f(x) = -2x^6 + 16x^3 + 32$$

$$0 = -2x^6 + 16x^3 + 32$$

substituiere

$$(\quad)^2 \begin{cases} x^3 = b \\ x^6 = b^2 \end{cases} (\quad)^2$$

$$0 = -2b^2 + 16b + 32$$

... Lösung abgekürzt ☺

$$b_1 = 9,66$$

$$b_2 = -1,66$$

resubstituiere (mit $x^3 = b$)

für $b_1 = 9,66$

$$9,66 = x^3 \quad | \sqrt[3]{}$$

$$2,13 \approx x_1$$

für $b_2 = -1,66$

$$-1,66 = x^3 \quad | \sqrt[3]{}$$

$$-1,18 \approx x_2$$

Loop:

- 1) $\text{---} : \boxed{x} = \text{---}$ ✓
- 2) $\text{---} \cdot \boxed{(x-2)} = \text{---}$ ✓
- 3) "Rest" $\ominus$ ✓

$$\begin{array}{r} 9375 : \boxed{5} = 1875 \\ \underline{-5} \\ 43 \\ \underline{-40} \\ 37 \end{array}$$

... weiter bis Ende...

d)

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$$

1. Nullstelle geben: $x_1 = 2$

$$(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) : \boxed{(x-2)} = \underline{x^2 - 7x + 12}$$

Restproblem

$$-(x^3 - 2x^2)$$

$$0 \quad -7x^2 + 26x$$

$$-(-7x^2 + 14x)$$

$$0 \quad +12x - 24$$

$$-(12x - 24)$$

$$0 + 0$$

✓ 😊

$$0 = x^2 - 7x + 12$$

$$x_{2,3} = 3,5 \pm \sqrt{3,5^2 - 12}$$

$$x_{2,3} = 3,5 \pm 0,5$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = 3$$

e)

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

1. Nullstelle "raten": Verdacht $x = 1$

$$f(1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \underline{x_1 = 1}$$

$$(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x-1) = x^2 + 5x + 6$$

$$-(x^3 - 1x^2)$$

$$0 \quad +5x^2 + x$$

$$-(5x^2 - 5x)$$

$$0 \quad +6x - 6$$

$$-(6x - 6)$$

$$0 + 0$$

✓ 😊

$$0 = x^2 + 5x + 6$$

$$x_{2,3} = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 6}$$

$$x_{2,3} = -2,5 \pm 0,5$$

$$x_2 = -3$$

$$x_3 = -2$$

f)

$$f(x) = x^3 + 7x^2 + 2x - 40$$

1. Nullstelle "raten": Verdacht $x = 2$

$$f(2) = 2^3 + 7 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 40$$

$$f(2) = 0 \quad \checkmark \quad \Rightarrow x_1 = 2$$

$$(x^3 + 7x^2 + 2x - 40) : (x - 2) = x^2 + 9x + 20$$

$$-(x^3 - 2x^2)$$

$$0 + 9x^2 + 2x$$

$$-(9x^2 - 18x)$$

$$0 + 20x - 40$$

$$-(20x - 40)$$

$$0 + 0$$

$$0 = x^2 + 9x + 20$$

$$x_{2/3} = -4,5 \pm \sqrt{4,5^2 - 20}$$

$$x_{2/3} = -4,5 \pm 0,5$$

$$x_2 = -5$$

$$x_3 = -4$$

i) $f(x) = x^3 - x^2 - 1,25x + 0,75$

1. Nullstelle "raten": Verdacht $x = -1$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 1,25 \cdot (-1) + 0,75$$

$$f(-1) = 0 \quad \checkmark \quad \Rightarrow x_1 = -1$$

$$(x^3 - x^2 - 1,25x + 0,75) : (x + 1) = x^2 - 2x + 0,75$$

$$-(x^3 + x^2)$$

$$0 - 2x^2 - 1,25x$$

$$-(-2x^2 - 2x)$$

$$0 + 0,75x + 0,75$$

$$-(0,75x + 0,75)$$

$$0 + 0$$



BESONDERHEIT !

$$(2x^4 + 0,5x^3 + 0x^2 - 4x + 6) : (x + 2) = 2x^3 - 5,5x^2$$

$$-(2x^4 + 6x^3)$$

$$0 - 5,5x^3 + 0x^2$$

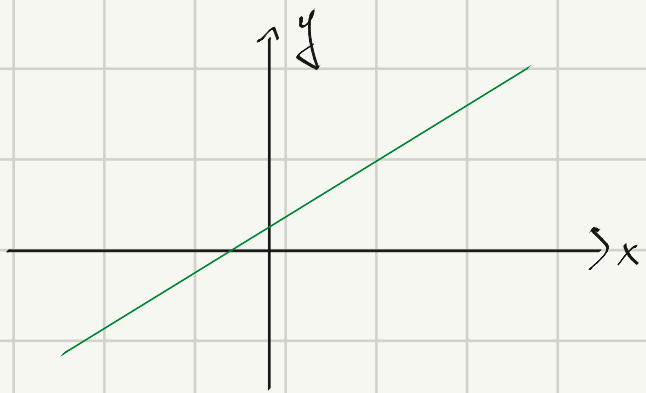
$$-(-5,5x^3 - 11x^2)$$

$$0 + 11x^2$$

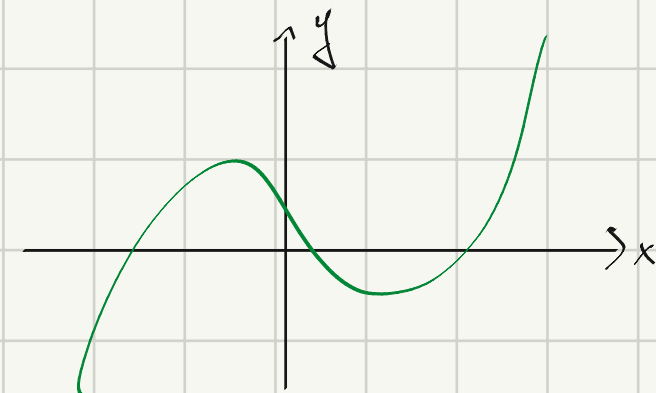
Systematisierung der Grade ganzzahliger Funktionen

(+)

1. Grades



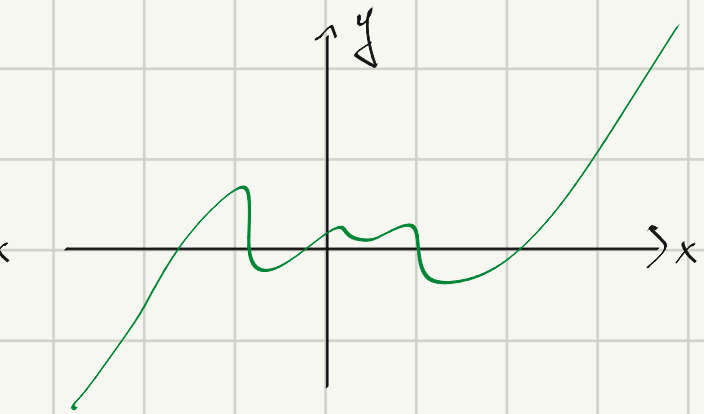
3. Grades



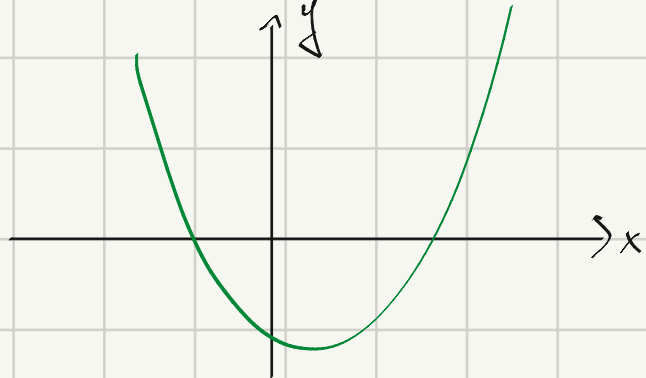
5. Grades



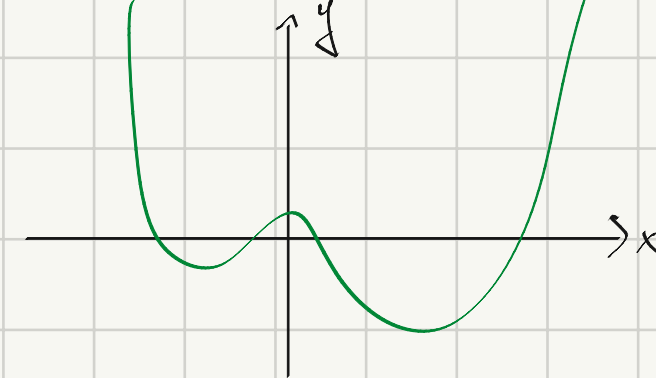
7. Grades



2. Grades



4. Grades



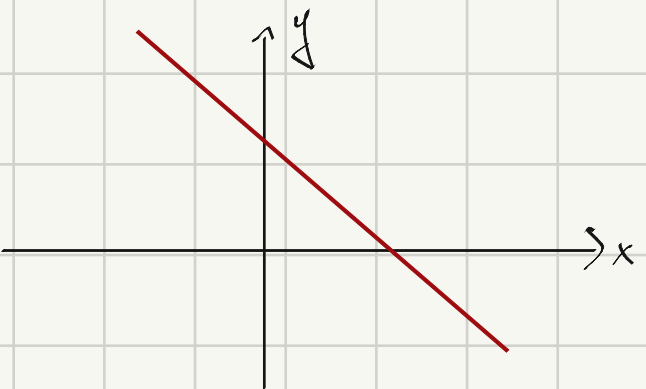
6. Grades



8. Grades



1. Grades



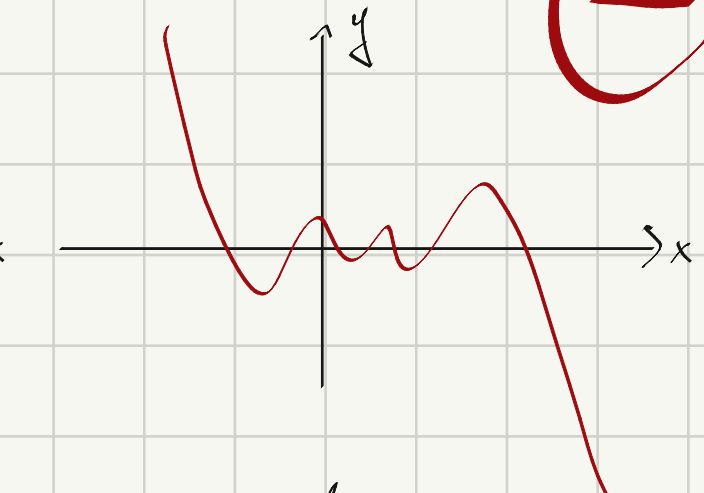
3. Grades



5. Grades

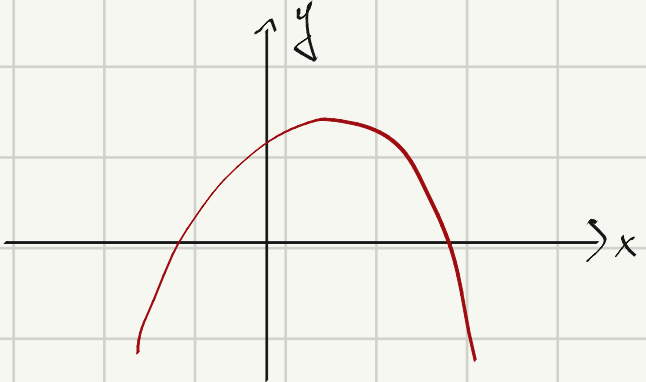


7. Grades



(-)

2. Grades



4. Grades



6. Grades



8. Grades



Symmetrie bei ganzrat. Funktionen:

1) Achssymmetrie

$$f(x) = f(-x)$$

am Beispiel: a) $f(x) = -2x^6 + 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 9$

b) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 8$

zu a)

$$f(x) = f(-x)$$

$$-2x^6 + 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 9 = -2 \cdot (-x)^6 + 3 \cdot (-x)^4 - \frac{1}{2}(-x)^2 - 9$$

$$-2x^6 + 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 9 = -2 \cdot x^6 + 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 9 \quad \checkmark \quad (\text{!})$$

$\Rightarrow$ Die Funktion ist
achsensymmetrisch
zur y-Achse!

zu b)

$$f(x) = f(-x)$$

$$3x^4 - 2x^3 + 8 = 3 \cdot (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^3 + 8$$

$$3x^4 - 2x^3 + 8 = 3x^4 + 2x^3 + 8 \quad | -3x^4 \quad | -8$$

$$-2x^3 = 2x^3 \quad \downarrow$$

$\Rightarrow$ Die Funktion ist nicht
achsensymmetrisch
zur y-Achse!

Liegt immer dann
vor, wenn in
Funktionsterm
ausschließlich

gerade Exponenten
vorkommen!

1) Punktsymmetrie

$$f(x) = -[f(-x)]$$

am Beispiel: a) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - \frac{1}{2}x + 9$

b) $f(x) = 3x^7 - 2x^4 - 2x^3$

zu a)

$$f(x) = -[f(-x)]$$

$$\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - \frac{1}{2}x + 9 = -\left[\frac{1}{2} \cdot (-x)^5 + 2 \cdot (-x)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-x) + 9\right]$$

$$\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - \frac{1}{2}x + 9 = -\left[-\frac{1}{2}x^5 - 2x^3 + \frac{1}{2}x + 9\right]$$

$$\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - \frac{1}{2}x + 9 = \frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - \frac{1}{2}x - 9 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Die Funktion ist
punktsymmetrisch
zu $Z(0|9)$

zu b)

Liegt immer dann
vor, wenn in
Funktionsterm
ausschließlich

ungerade Exponenten
vorkommen!

Aufgaben:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2,5x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 1,25x + 0,75$

I) Berechnen Sie alle Nullstellen

II) Definieren Sie das Verhalten im Unendlichen

III) Untersuchen Sie auf Symmetrie

Zu a)

I) $0 = \frac{1}{2}x^4 - 2,5x^2 + 2 \quad | \cdot 2$

$$0 = x^4 - 5x^2 + 4$$

substituiere:

$$x^2 = z$$

$$x^4 = z^2$$

$$0 = z^2 - 5z + 4$$

$$z_{1/2} = 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 4}$$

$$z_{1/2} = 2,5 \pm 1,5$$

$$z_1 = 4$$

$$z_2 = 1$$

resubstituiere mit $\boxed{x^2 = z}$

für $z_1 = 4$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

für $z_2 = 1$

$$x^2 = 1 \quad | \sqrt{}$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = -1$$

II) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

III) (Verdacht auf Achssym., da nur gerade Exponenten)

• Prüfung auf Achssymmetrie:

$$f(x) = f(-x)$$

$$\frac{1}{2}x^4 - 2,5x^2 + 2 = \frac{1}{2} \cdot (-x)^4 - 2,5 \cdot (-x)^2 + 2$$

$$\frac{1}{2}x^4 - 2,5x^2 + 2 = \frac{1}{2}x^4 - 2,5x^2 + 2$$

$\Rightarrow$ Diese Funktion ist
Achsensymmetrisch
zur y-Achse! ✓

Zu b)

I)

1. Nullstelle raten: Verdacht: $x_1 = -1$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 1,25 \cdot (-1) + 0,75$$

$$f(-1) = 0 \quad \checkmark \quad (\text{😊}) \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$$

$$(x^3 - x^2 - 1,25x + 0,75) : (x + 1) = x^2 - 2x + 0,75$$

$$-(x^3 + x^2)$$

$$0 - 2x^2 - 1,25x$$

$$-(-2x^2 - 2x)$$

$$0 + 0,75x + 0,75$$

$$-(0,75x + 0,75)$$

$$0 + 0 \quad \checkmark$$

$$0 = x^2 - 2x + 0,75$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 0,75}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 0,5$$

$$\underline{x_1 = 1,5}$$

$$\underline{x_2 = 0,5}$$

$$\text{II) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

III)

Verdacht: Ungesymmetrisch

Prüfen auch Achssymmetrie:

$$f(x) = f(-x)$$

$$x^3 - x^2 - 1,25x + 0,75 = (-x)^3 - (-x)^2 - 1,25 \cdot (-x) + 0,75$$

$$x^3 - x^2 - 1,25x + 0,75 = -x^3 - x^2 + 1,25x + 0,75 \quad | +x^2 | - 0,75$$

$$x^3 - 1,25x = -x^3 + 1,25x \quad \nparallel$$

$\Rightarrow$ Diese Funktion ist nicht achsensymmetrisch!

Prüfen auch Punktsymmetrie:

$$f(x) = -[f(-x)]$$

$$x^3 - x^2 - 1,25x + 0,75 = -[(-x)^3 - (-x)^2 - 1,25 \cdot (-x) + 0,75]$$

$$x^3 - x^2 - 1,25x + 0,75 = -[-x^3 - x^2 + 1,25x + 0,75]$$

$$x^3 - x^2 - 1,25x + 0,75 = x^3 + x^2 - 1,25x - 0,75 \quad | -x^3 | + 1,25x$$

$$-x^2 + 0,75 = x^2 - 0,75 \quad \nparallel$$

$\Rightarrow$ Diese Funktion ist nicht punktsymmetrisch!

$\Rightarrow$ Die Funktion ist demnach asymmetrisch!

$$f(x) = \underbrace{3x^6} - \underbrace{2x^5} + \underbrace{\frac{1}{2}x^4} - \underbrace{3x^3} + \underbrace{2x^2} - \underbrace{5x^1} + \underbrace{6}$$

$$f'(x) = 18x^5 - 10x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 4x - 5$$

ableiten:

- 1) Man geht gliedweise vor
- 2) Exponent "·" Koeffizient
- 3) Exponent "-1"

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1x^2 + 2$$

Ableitungen: $\underbrace{f'(x)}_m = 1 \cdot x^2 - 2x$

(Steigungsfunktion)

$$f''(x) = 2x - 2$$

(Krümmungsfunktion)

notwendige
Bedingung

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

$$0 = 1 \cdot x^2 - 2x$$

$$0 = x \cdot (x - 2) \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$$

$$0 = x - 2 \quad | +2$$

$$\underline{\underline{2 = x_2}}$$

Links-
krümmung  ⊕

Rechtskrümmung
 ⊖

hinreichende
Bedingung

$$\boxed{f''(x) \neq 0}$$

$$f''(0) = 2 \cdot 0 - 2$$

$$f''(0) = -2$$

$\Rightarrow$ HP

$$f''(2) = 2 \cdot 2 - 2$$

$$f''(2) = 2$$

$\Rightarrow$ TP

$f'' > 0$: TP

$f'' < 0$: HP

$f'' = 0$: Sattelpunkt

$$f(x) = \frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 8x$$

a) $0 = \frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 8x$
 $0 = x \cdot \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{8}{3}x - 8 \right) \Rightarrow x_1 = 0$
 $0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{8}{3}x - 8$

2. Nullstelle raten: Verdacht: $x=2$

$$0 = \frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - \frac{8}{3} \cdot 2 - 8$$

$$0 = 0 \quad \checkmark \quad \Rightarrow x_2 = 2$$

$$\left(\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{8}{3}x - 8 \right) : (x-2) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + 4$$

$$- \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 \right)$$

$$\frac{10}{3}x^2 - \frac{8}{3}x$$

$$- \left(\frac{10}{3}x^2 - \frac{20}{3}x \right)$$

$$4x - 8$$

$$- (4x - 8)$$

$$0$$

$$0 = \frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + 4 \quad | : \frac{2}{3}$$

$$0 = x^2 + 5x + 6$$

$$x_{3/4} = -2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 6}$$

$$x_{3/4} = -2.5 \pm 0.5$$

$$x_3 = -2$$

$$x_4 = -3$$

b) $f(0) = \frac{2}{3} \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^3 - \frac{8}{3} \cdot 0^2 - 8 \cdot 0$
 $f(0) = 0$
Sy(0|0)

c) Prüfen auf Achssymmetrie:

$$f(x) = f(-x)$$

$$\frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 8x = \frac{2}{3} \cdot (-x)^4 + 2(-x)^3 - \frac{8}{3}(-x)^2 - 8 \cdot (-x)$$

$$\cancel{\frac{2}{3}x^4} + 2x^3 - \cancel{\frac{8}{3}x^2} - 8x = \cancel{\frac{2}{3}x^4} - 2x^3 - \cancel{\frac{8}{3}x^2} + 8x$$

$$2x^3 - 8x = -2x^3 + 8x$$

⚡ Diese Funktion ist nicht achsensymmetrisch!

Prüfen auf Punktsymmetrie:

$$f(x) = -[f(-x)]$$

$$\frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 8x = - \left[\frac{2}{3} \cdot (-x)^4 + 2(-x)^3 - \frac{8}{3}(-x)^2 - 8 \cdot (-x) \right]$$

$$\frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 8x = - \left[\frac{2}{3}x^4 - 2x^3 - \frac{8}{3}x^2 + 8x \right]$$

$$\cancel{\frac{2}{3}x^4} + 2x^3 - \cancel{\frac{8}{3}x^2} - 8x = - \cancel{\frac{2}{3}x^4} + 2x^3 + \cancel{\frac{8}{3}x^2} - 8x$$

$$\frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^2 = - \frac{2}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^2$$

⚡ Diese Funktion ist nicht punktsymmetrisch!

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

$$f(x) = \dots$$

a) Nullstellen

b) Schnittpunkt mit y-Achse

c) Symmetrie

d) Verhalten im Unendlichen (lim-Gedöns)

e) Extrempunkte

f) Wendepunkte

e) • Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{16}{3}x - 8$$

$$f''(x) = 8x^2 + 12x - \frac{16}{3}$$

$$f'''(x) = 16x + 12$$

• notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$0 = \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{16}{3}x - 8$$

1. Nullstelle raten: Verdacht: $x \approx -0,93$

$$f(-0,93) = \frac{8}{3} \cdot (-0,93)^3 + 6 \cdot (-0,93)^2 - \frac{16}{3} \cdot (-0,93) - 8$$

$$f(-0,93) \approx 0 \Rightarrow \underline{x_1 = -0,93}$$

$$\left(\frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{16}{3}x - 8 \right) : (x + 0,93) = \frac{8}{3}x^2 + \frac{88}{25}x - 8,6$$

$$- \left(\frac{8}{3}x^3 + \frac{62}{25}x^2 \right)$$

$$\begin{array}{r} \frac{88}{25}x^2 - \frac{16}{3}x \\ - \left(\frac{88}{25}x^2 + \frac{2046}{625}x \right) \\ \hline -8,6x - 8 \\ (-8,6x - 8) \\ \hline 0 \quad + 0 \end{array}$$

$$0 = \frac{8}{3}x^2 + \frac{88}{25}x - 8,6 \quad | : \frac{8}{3}$$

$$0 = x^2 + \frac{33}{25}x - \frac{129}{40}$$

$$x_{2/3} = -\frac{33}{50} \pm \sqrt{\left(\frac{33}{50}\right)^2 + \frac{129}{40}}$$

$$x_{2/3} \approx -\frac{33}{50} \pm 1,91$$

$$\underline{x_2 = 1,25}$$

$$\underline{x_3 = -2,57}$$

• hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$

$$f''(-0,93) = 8 \cdot (-0,93)^2 + 12 \cdot (-0,93) - \frac{16}{3}$$

$$f''(-0,93) \approx -9,6$$

$\Rightarrow$ HP

$$f''(1,25) = 8 \cdot 1,25^2 + 12 \cdot 1,25 - \frac{16}{3}$$

$$f''(1,25) \approx 22,17$$

$\Rightarrow$ TP

$$f''(-2,57) = 8 \cdot (-2,57)^2 + 12 \cdot (-2,57) - \frac{16}{3}$$

$$f''(-2,57) \approx 16,7$$

$\Rightarrow$ TP

• $f(x)$ - Werte:

$$f(-0,93) = \frac{2}{3}(-0,93)^4 + 2(-0,93)^3 - \frac{8}{3}(-0,93)^2 - 8(-0,93)$$

$$f(-0,93) \approx 4,02$$

$$HP(-0,93 | 4,02)$$

$$f(1,25) = \frac{2}{3} \cdot 1,25^4 + 2 \cdot 1,25^3 - \frac{8}{3} \cdot 1,25^2 - 8 \cdot 1,25$$

$$f(1,25) \approx -8,63$$

$$TP_1(1,25 | -8,63)$$

$$f(-2,57) = \frac{2}{3}(-2,57)^4 + 2(-2,57)^3 - \frac{8}{3}(-2,57)^2 - 8(-2,57)$$

$$f(-2,57) \approx -1,92$$

$$TP_2(-2,57 | -1,92)$$

f) Wendepunkte:

• notwendige Bedingung:

$$f''(x) = 0$$

$$f''(x) = 8x^2 + 12x - \frac{16}{3}$$

$$f'''(x) = 16x + 12$$

$$0 = 8x^2 + 12x - \frac{16}{3} \quad | :8$$

$$0 = x^2 + 1,5x - \frac{2}{3}$$

$$x_{1/2} = -0,75 \pm \sqrt{0,75^2 + \frac{2}{3}}$$

$$x_{1/2} \approx -0,75 \pm 1,11$$

$$x_1 \approx 0,36$$

$$x_2 \approx -1,86$$

• hinreichende Bedingung:

$$f'''(0,36) = 16 \cdot 0,36 + 12$$

$$f'''(0,36) = 17,76$$

$$\Rightarrow WP_{R-L}$$

$$f'''(-1,86) = 16 \cdot (-1,86) + 12$$

$$f'''(-1,86) = -17,76$$

$$\Rightarrow WP_{L-R}$$

• $f(x)$ - Werte:

$$f(0,36) = \frac{2}{3} \cdot 0,36^4 + 2 \cdot 0,36^3 - \frac{8}{3} \cdot 0,36^2 - 8 \cdot 0,36$$

$$f(0,36) \approx -3,11$$

$$WP_{R-L}(0,36 | -3,11)$$

$$f(-1,86) = \frac{2}{3}(-1,86)^4 + 2(-1,86)^3 - \frac{8}{3}(-1,86)^2 - 8(-1,86)$$

$$f(-1,86) \approx 0,771$$

$$WP_{L-R}(-1,86 | 0,771)$$

• Funktion/Ableitungen/Stamm

$$f(x) = \frac{2}{3}x^4 + 2x^3 - 2\frac{2}{3}x^2 - 8x$$

$x_1 = -3$; 1-fache Nullstelle

$x_2 = -2$; 1-fache Nullstelle

$x_3 = 0$; 1-fache Nullstelle

$x_4 = 2$; 1-fache Nullstelle

$> 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt: $(-2,57 / -1,92)$

58

Hochpunkt: $(-0,93 / 4,02)$

$0 \Rightarrow$ Tiefpunkt: $(1,25 / -8,63)$

Wendepunkt: $(-1,86 / 0,771)$

$f'''(0,359) = -3,11$

$f'''(0,359) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt: $(0,359 / -3,11)$

x-Achse:

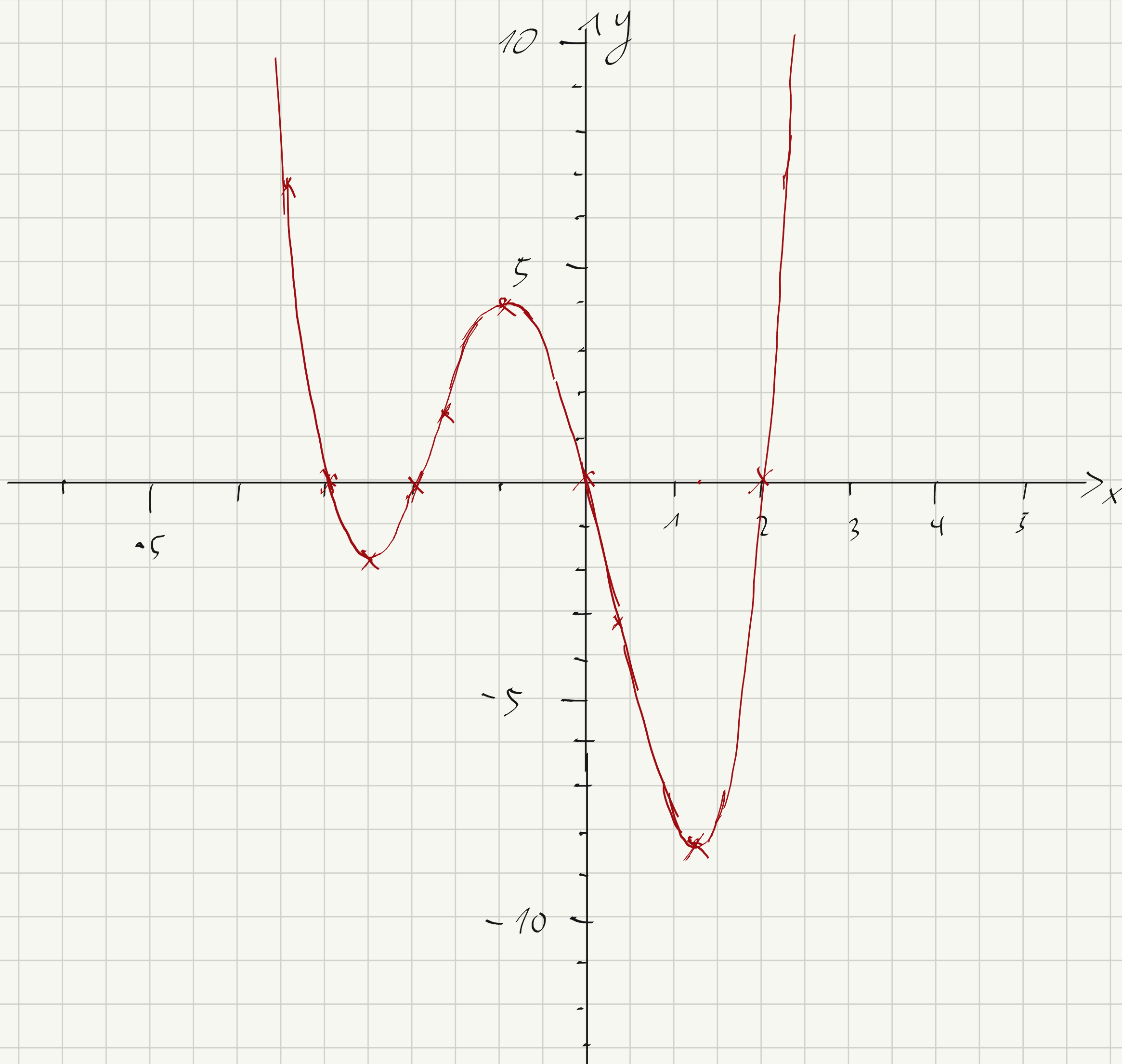
-5

bis 4

y-Achse:

-9

bis 7

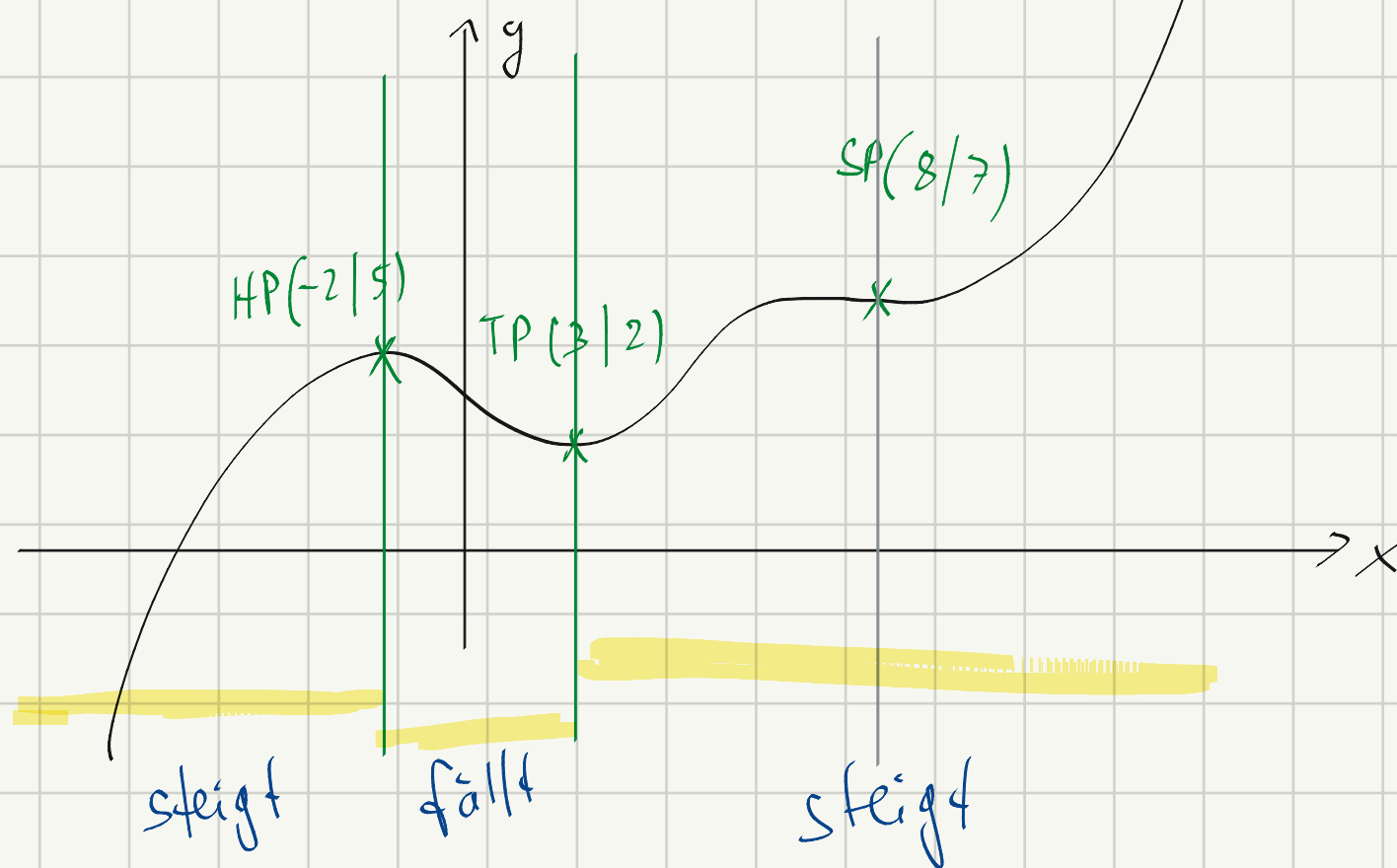


Vollständige Kurvendiskussion:

- 1) Definitions- und Wertebereich
- 2) Symmetrieeigenschaften
- 3) Verhalten im Unendlichen
- 4) Monotonieverhalten
- 5) Krümmungsverhalten
- 6) Schnittpunkt mit der y-Achse
- 7) Nullstellen
- 8) Ableitungen (die ersten 3)
- 9) Extrempunkte
- 10) Wendepunkte
- 11) Graph

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1$$

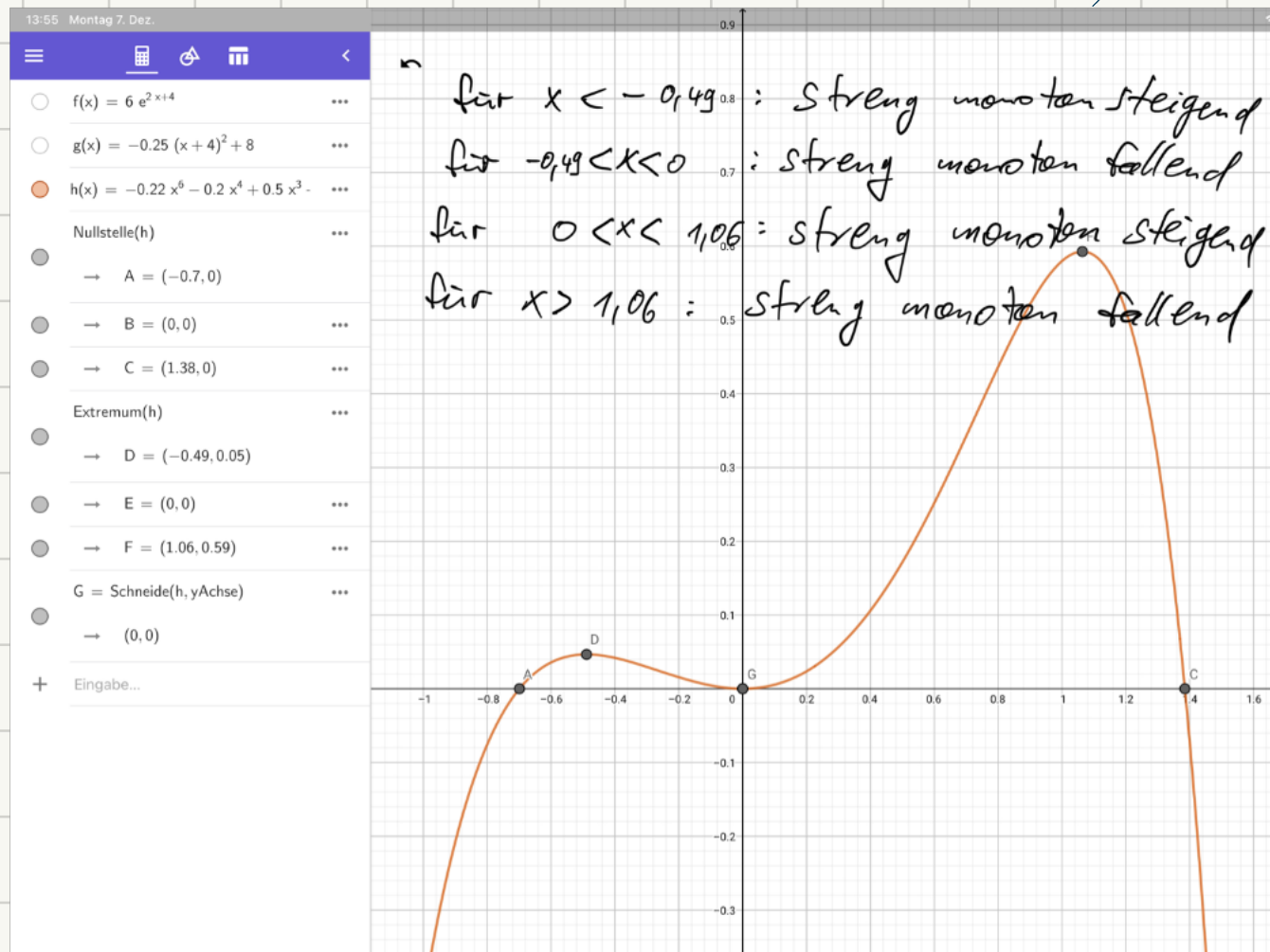
Erklärungen zum Monotonieverhalten:



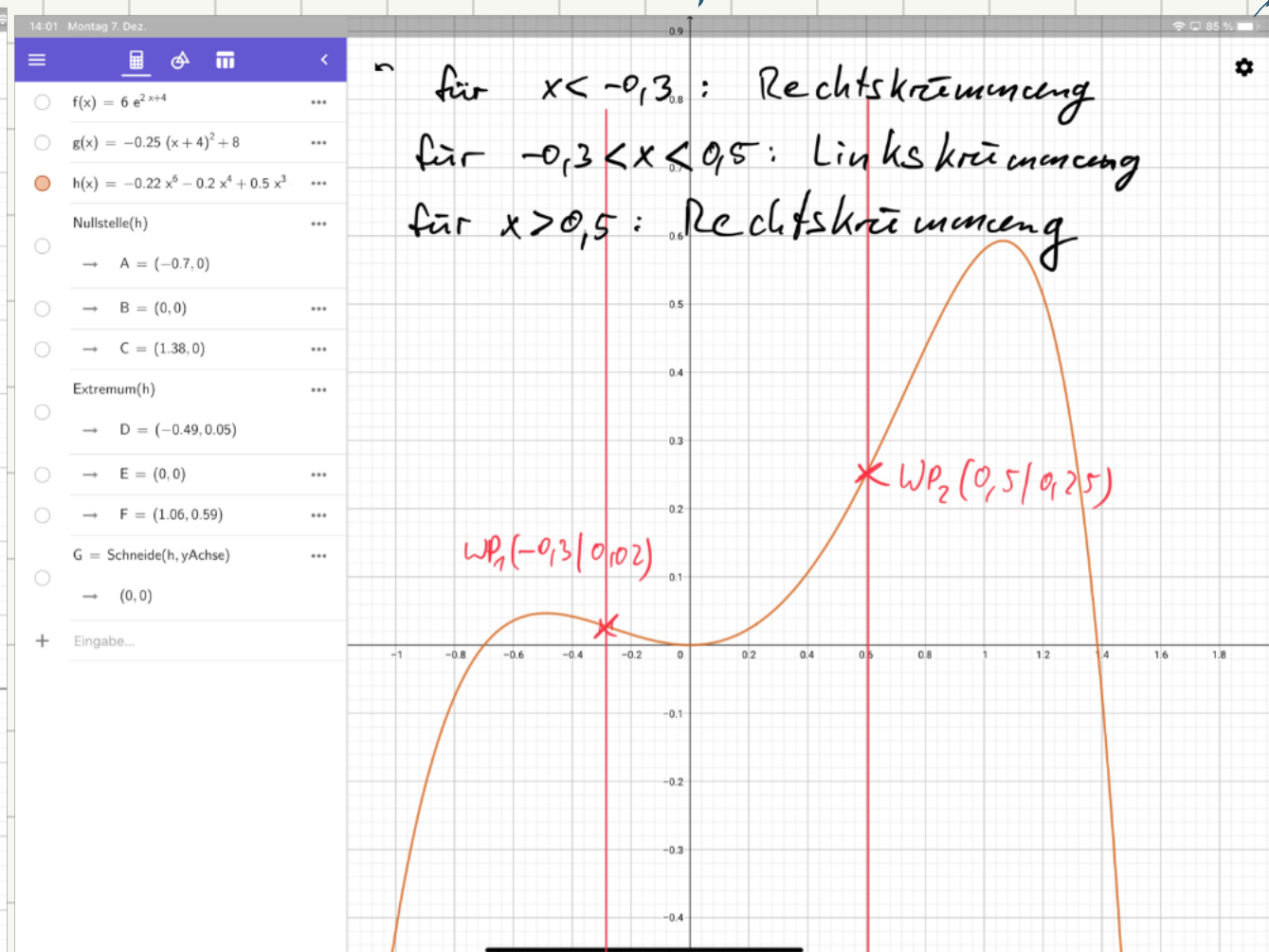
Monotonieverhalten:

für alle $x < -2$: streng monoton steigend
für alle $-2 < x < 3$: streng monoton fallend
für alle $x > 3$: monoton steigend

Monotonieverhalten (an den Extrempunkten "schneiden")



Krümmungsverhalten (an den Wendepunkten "schneiden")



Definitions- und Wertebereich:

Definitionsbereich:

IMMER $D=R$ =>

$$D = \mathbb{R}$$

Wertebereich:

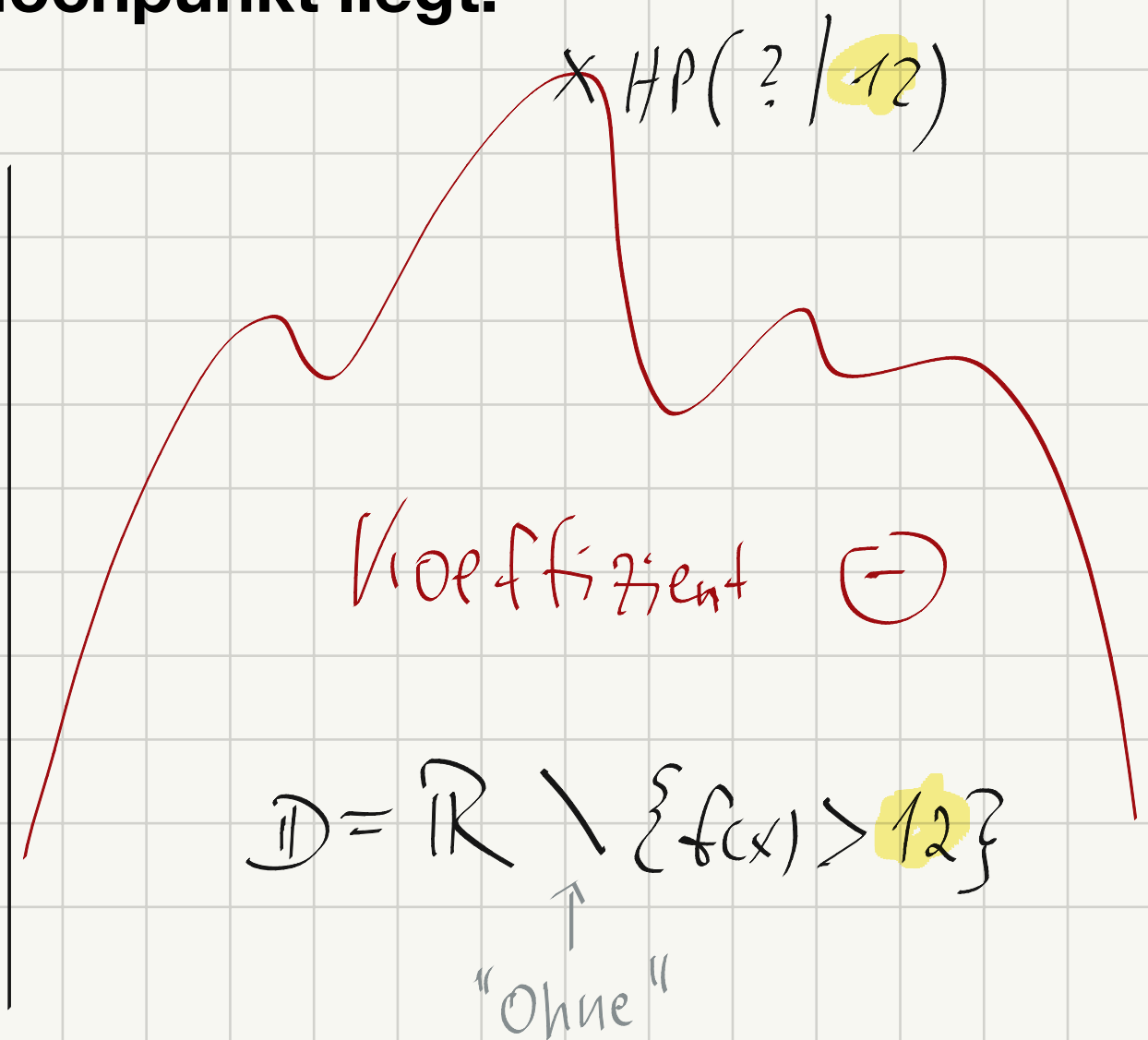
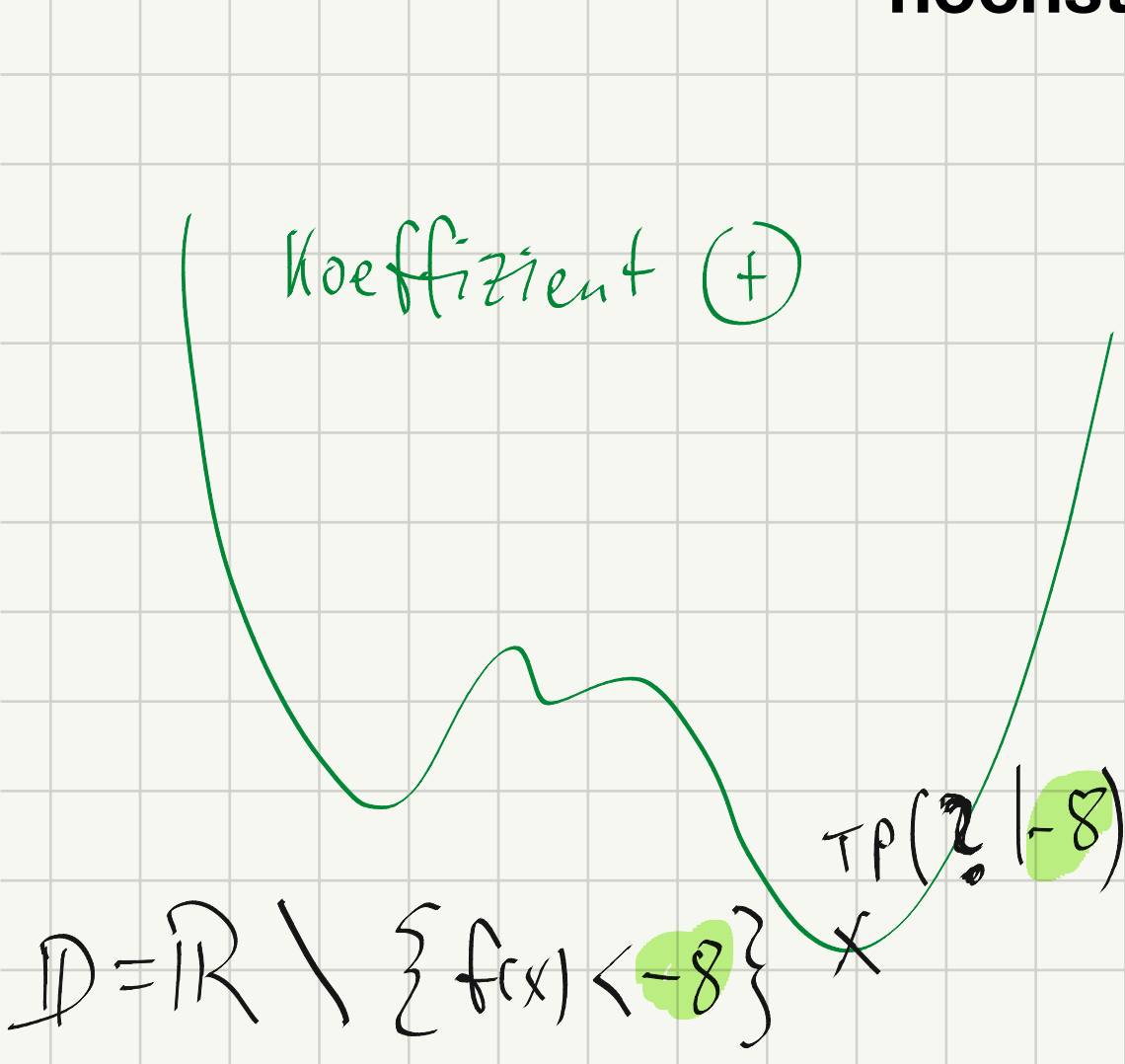
ungerader Funktionsgrad: $W=R$ =>

$$W = \mathbb{R}$$

gerader Funktionsgrad:

—> Koeffizient positiv: „Alles wegschneiden, was tiefer als der tiefste Tiefpunkt liegt!“

—> Koeffizient negativ: „Alles wegschneiden, was höher als der höchste Hochpunkt liegt!“



Vollständige Kurvendiskussion der

Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1$

1) Definitions- & Wertebereich:

- $D = \mathbb{R}$
- $W = \mathbb{R} \setminus \{f(x) > 3\}$

2) Symmetrieverhalten:

Prüfen auf Achssymmetrie:
 $f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1 &= -\frac{1}{4}(-x)^4 + 2(-x)^2 - 1 \\ -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1 &= -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Kurve der Funktion ist
achsensymmetrisch zur y-Achse

3) Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

4) Monotonieverhalten

für $x < -2$: streng monoton steigend

für $-2 < x < 0$: streng monoton fallend

für $0 < x < 2$: streng monoton steigend

für $x > 2$: streng monoton fallend

Vollständige Kurvendiskussion:

- 1) Definitions- und Wertebereich
- 2) Symmetrieeigenschaften
- 3) Verhalten im Unendlichen
- 4) Monotonieverhalten
- 5) Krümmungsverhalten
- 6) Schnittpunkt mit der y-Achse
- 7) Nullstellen
- 8) Ableitungen (die ersten 3)
- 9) Extrempunkte
- 10) Wendepunkte
- 11) Graph

5) Krümmungsverhalten:

für $x < -1,15$: Rechtskrümmung

für $-1,15 < x < 1,15$: Linkskrümmung

für $x > 1,15$: Rechtskrümmung

6) Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = -\frac{1}{4} \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^2 - 1$$

$$f(0) = -1$$

$\Rightarrow$

$$S_y(0|-1)$$

7) Nullstellen:

$$0 = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1$$

substituiere: $x^2 = z$
 $x^4 = z^2$

$$0 = -\frac{1}{4}z^2 + 2z - 1 \quad | : (-\frac{1}{4})$$

$$0 = z^2 - 8z + 4$$

$$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 4}$$

$$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{12}$$

$$z_1 \approx 7,46$$

$$z_2 \approx 0,54$$

resubstituiere:

$$\text{mit } x^2 = z$$

für $z_1 = 7,46$

$$x^2 = 7,46 \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 \approx 2,73$$

$$x_2 \approx -2,73$$

für $z_2 = 0,54$

$$x^2 = 0,54$$

$$x_3 \approx 0,73$$

$$x_4 \approx -0,73$$

$$N_1(2,73|0)$$

$$N_2(-2,73|0)$$

$$N_3(0,73|0)$$

$$N_4(-0,73|0)$$

8) Ableitungen:

$$f'(x) = -x^3 + 4x$$

$$f''(x) = -3x^2 + 4$$

$$f'''(x) = -6x$$

9) Extrempunkte:

• notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$0 = -x^3 + 4x$$

$$0 = x \cdot (-x^2 + 4) \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$$

$$0 = -x^2 + 4 \quad | +x^2$$

$$x^2 = 4$$

$$|\sqrt{}$$

$$\underline{x_2 = 2}$$

$$\underline{x_3 = -2}$$

• hinr. Bed.: $f''(x) \neq 0$

$$f''(0) = -3 \cdot 0^2 + 4$$

$$\underline{f''(0) = 4} \quad \Rightarrow \text{TP}$$

$$f''(2) = -3 \cdot 2^2 + 4$$

$$\underline{f''(2) = -8} \quad \Rightarrow \text{HP}$$

$$f''(-2) = -3 \cdot (-2)^2 + 4$$

$$\underline{f''(-2) = -8} \quad \Rightarrow \text{HP}$$

• $f(x)$ -Werte:

$$f(0) = -\frac{1}{4} \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^2 - 1$$

$$\underline{f(0) = -1}$$

$$f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 1$$

$$\underline{f(2) = 3}$$

$$f(-2) = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^2 - 1$$

$$\underline{f(-2) = 3}$$

TP(0|-1)

HP₁(2|3)

HP₂(-2|3)

10) Wendepunkte:

• notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -3x^2 + 4 & | -4 \\ -4 &= -3x^2 & | :(-3) \\ \frac{4}{3} &= x^2 & | \sqrt{} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{1,15 \approx x_1} \\ \underline{-1,15 \approx x_2} \end{aligned}$$

• hinr. Bed.: $f'''(x) \neq 0$

$$f'''(1,15) = -6 \cdot 1,15$$

$$f'''(1,15) = -6,9 \Rightarrow \text{WP}_{L-R}$$

$$f'''(-1,15) = -6 \cdot (-1,15)$$

$$f'''(-1,15) = 6,9 \Rightarrow \text{WP}_{R-L}$$

• $f(x)$ -Werte

$$f(1,15) = -\frac{1}{4} \cdot 1,15^4 + 2 \cdot 1,15^2 - 1$$

$$f(1,15) \approx 1,2$$

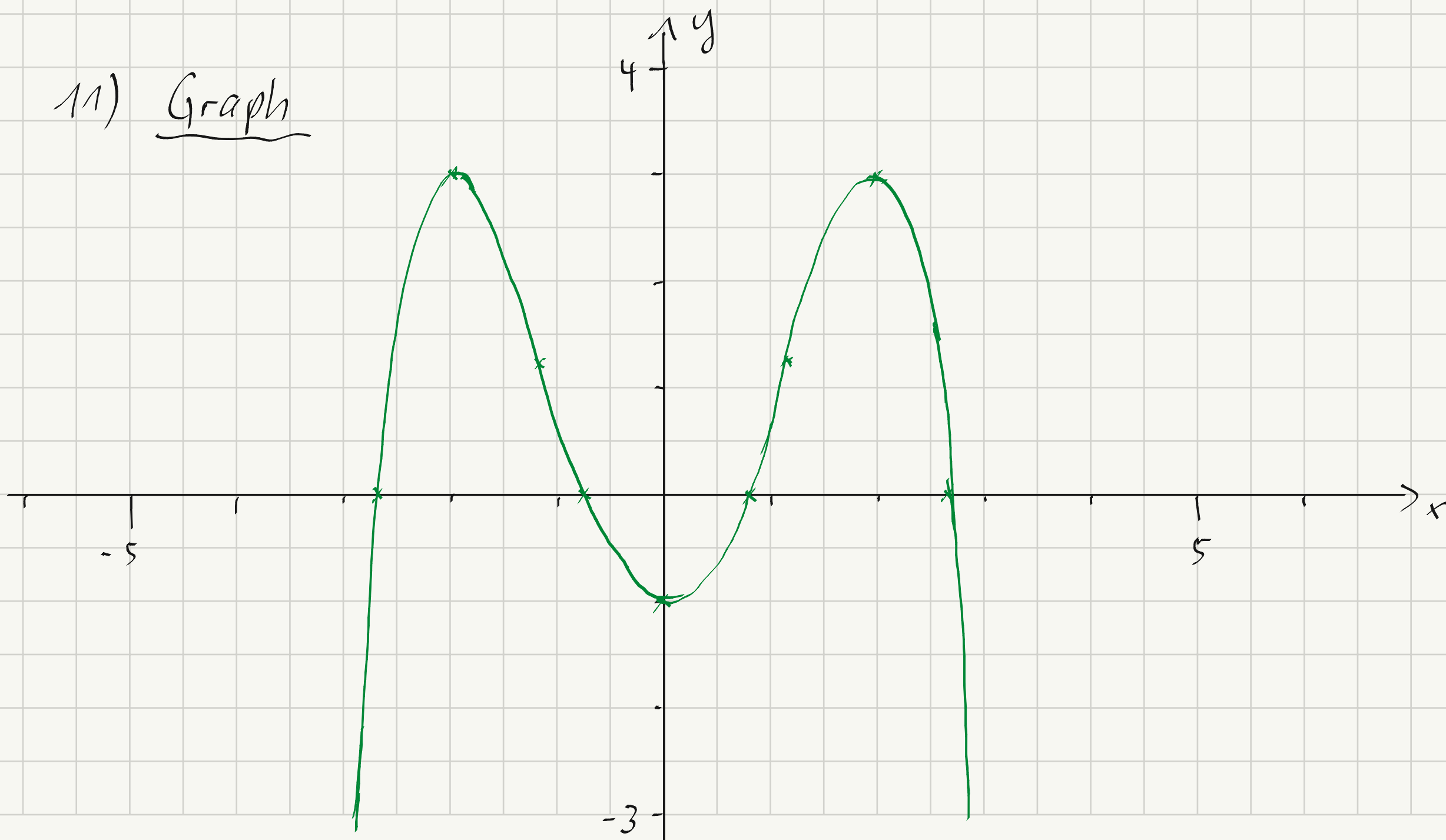
$$f(-1,15) = -\frac{1}{4} \cdot (-1,15)^4 + 2 \cdot (-1,15)^2 - 1$$

$$f(-1,15) \approx 1,2$$

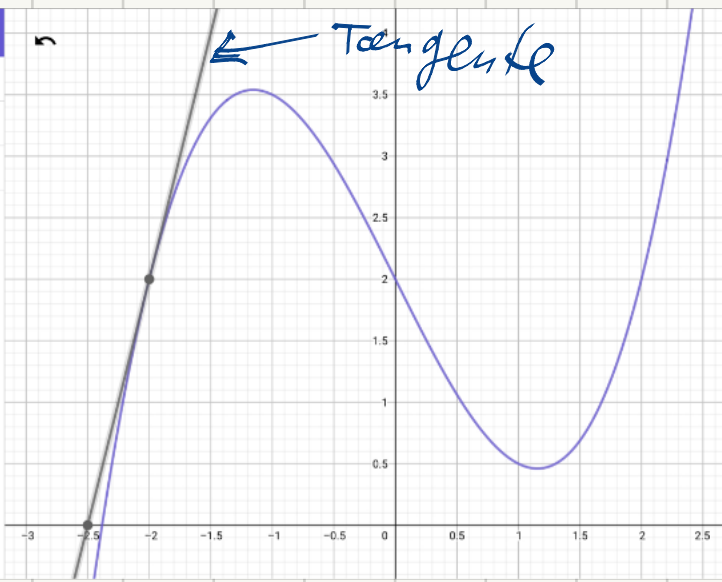
$$\text{WP}_{L-R}(1,15 | 1,2)$$

$$\text{WP}_{R-L}(-1,15 | 1,2)$$

11) Graph



Tangenten- und Normalenberechnung



Tangentenberechnung:

Aufgabe: Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Tangentenfunktion, die an der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 2$ im x -Wert $x = -2$ anliegt.

1) Tangententialpunkt T mit Hilfe von f vervollständigen:

$$f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 2$$

$$f(-2) = 2$$

$$\Rightarrow T(-2/2)$$

2) Bauen der 1. Ableitung (also der Steigungsfunktion):

$$f'(x) = 1,5x^2 - 2$$

3) Berechnung der Steigung im Tangentialpunkt T :

$$f'(-2) = 1,5 \cdot (-2)^2 - 2$$

$$f'(-2) = 4$$

$$\Rightarrow \text{Tangenten-} m = 4$$

4) Berechnung des Tangenten- b :

Grundgerüst: $g(x) = m \cdot x + b$

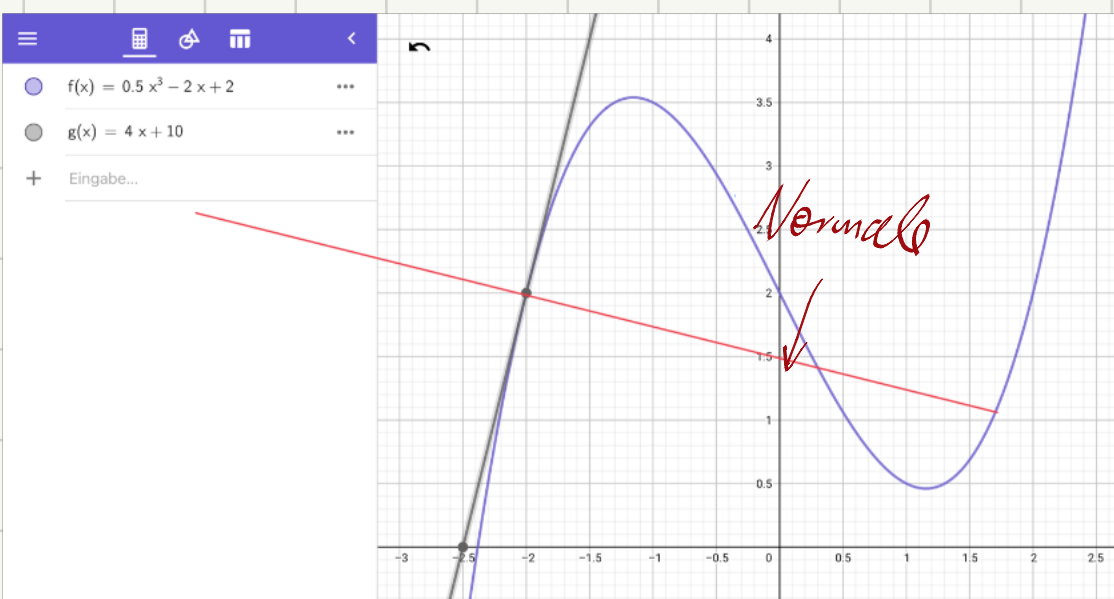
$$2 = 4 \cdot (-2) + b$$

$$2 = -8 + b \quad | +8$$

$$\underline{\underline{10 = b}}$$

5) Tangentenfunktion notieren:

$$\underline{\underline{t(x) = 4 \cdot x + 10}}$$



Normalenberechnung:

Aufgabe: Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Normalenfunktion, die an der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 2$ im x-Wert $x = -2$ anliegt.

1) Tangententialpunkt T mit Hilfe von f vervollständigen:

$$f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 2$$

$$f(-2) = 2$$

$$\Rightarrow T(-2|2)$$

2) Bauen der 1. Ableitung (also der Steigungsfunktion):

$$f'(x) = 1,5x^2 - 2$$

3) Berechnung der Steigung im Tangentialpunkt T:

$$f'(-2) = 1,5 \cdot (-2)^2 - 2$$

$$f'(-2) = 4$$

$$\Rightarrow \text{Tangenten-} m = 4$$

4) Tan steiler in Normalensteigung überführen:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$4 \cdot m_2 = -1 \quad | :4$$

$$m_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Normalen-Steigung } m = -\frac{1}{4}$$

5) Berechnung des Tangenten-b:

Grundgerüst: $g(x) = m \cdot x + b$

$$2 = -\frac{1}{4} \cdot (-2) + b$$

$$2 = \frac{1}{2} + b \quad | -\frac{1}{2}$$

$$\underline{1,5 = b}$$

6) Normalenfunktion notieren:

$$\underline{n(x) = -\frac{1}{4}x + 1,5}$$

Übung: Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Tangentenfunktion, die an der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 4$ im x -Wert $x=3$ anliegt.

$$\bullet f(3) = \frac{1}{4} \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^2 - 4$$

$$f(3) = -1,75$$

$$\Rightarrow T(3 | 1,75)$$

$$\bullet f'(x) = x^3 - 4x$$

$$f'(3) = 3^3 - 4 \cdot 3$$

$$f'(3) = 15$$

$$\Rightarrow m = 15$$

$$|g(x) = m \cdot x + b|$$

$$-1,75 = 15 \cdot 3 + b$$

$$-1,75 = 45 + b \quad | -45$$

$$-46,75 = b$$

$$\underline{\underline{t(x) = 15x - 46,75}}$$

h-Methode

Aufgabe:

Beweisen Sie unter Verwendung von grenzwerttechnischen Überlegungen, dass zur Funktion

$f(x) = 3x^2 - 6$ eine Ableitungsfunktion $f'(x) = 6x$ existiert.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = 3x^2 - 6$$

Kontrollergebnis
 $f'(x) = 6x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot (x+h)^2 - 6 - (3x^2 - 6)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot (x^2 + 2xh + h^2) - 6 - 3x^2 + 6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{3x^2} + 6xh + 3h^2 - \cancel{6} - \cancel{3x^2} + \cancel{6}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h} \cdot (6x + 3h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x + 3 \cdot 0 = \underline{\underline{6x = f'(x)}}$$

Pascal'sches Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & 1 & & 1 & & & \\ 1 & & 2 & & 1 & & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$(x+h)$$

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$(x+h)^3$$

$$(x+h)^4 = 1x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

$$(x+h)^5$$

$$\vdots$$

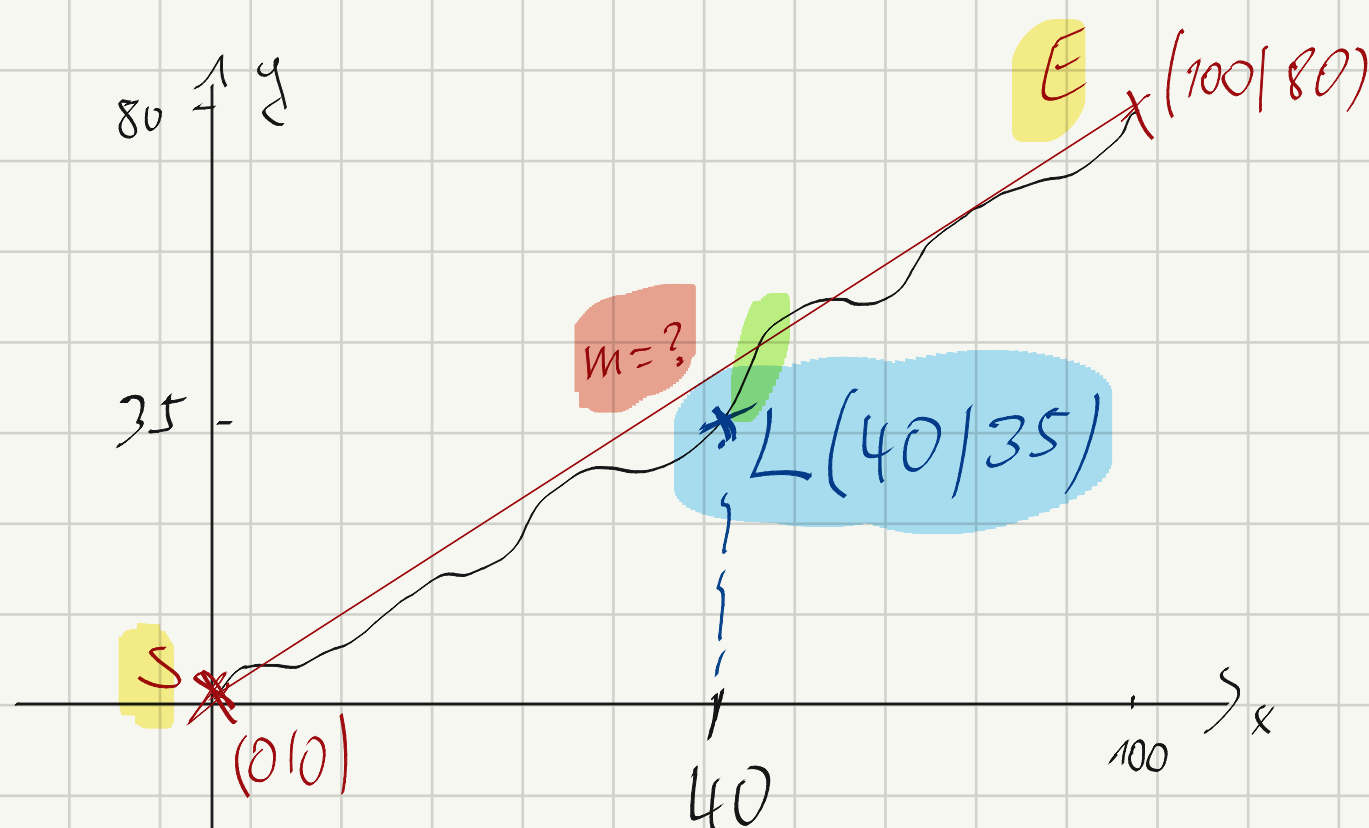
Übung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 6$$

$$f'(x) = 2x^3 - 4x$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+h)^4 - 2 \cdot (x+h)^2 + 6 - [\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 6]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot (x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4) - 2 \cdot (x^2 + 2xh + h^2) + 6 - \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - 6}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{\frac{1}{2}x^4} + 2x^3h + 3x^2h^2 + 2xh^3 + \frac{1}{2}h^4 - \cancel{2x^2} + 4xh - h^2 + \cancel{6} - \cancel{\frac{1}{2}x^4} + \cancel{2x^2} - \cancel{6}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^3h + 3x^2h^2 + 2xh^3 + \frac{1}{2}h^4 + 4xh - h^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \cancel{h} \cdot (2x^3 + 3x^2h + 2xh + \frac{1}{2}h^3 + 4x - h) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x^3 + 3x^2h + 2xh + \frac{1}{2}h^3 + 4x - h) \\
 &= 2x^3 + \cancel{3x^2 \cdot 0} + \cancel{2x \cdot 0} + \cancel{\frac{1}{2} \cdot 0^3} + 4x - \cancel{0} = \underline{\underline{2x^3 + 4x = f'(x)}}
 \end{aligned}$$

MITTLERE VS. LOKALE STEIGUNG:



Für die **mittlere Steigung** benötigt man IMMER genau ZWEI Punkte. Zwischen diesen wird stets ein LINEARER Verlauf unterstellt. Die Steigung dieser Geraden ist die MITTLERE STEIGUNG, die zwischen den beiden Punkten herrscht.

mittlere Steigung:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{80 - 0}{100 - 0} = \frac{8}{10} = 0,8$$

Betrachtet man die **lokale Steigung**, geht es immer um die Steigung in EINEM GANZ KONKRETEN PUNKT.

Diese kann im Grunde nur mit Hilfe der 1. Ableitung errechnet werden, indem man den x-Wert des betreffenden Punktes in diese einsetzt.

$$m = f'(40) = \dots = ?$$

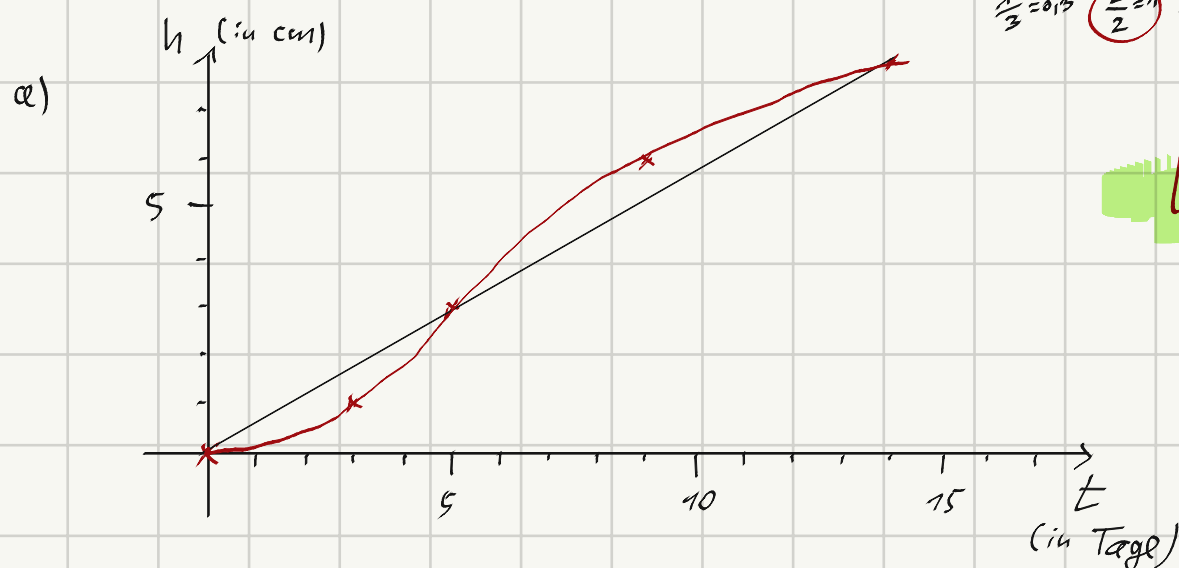
4. Das Höhenwachstum einer Tulpe wurde protokolliert.

- Skizzieren Sie den Graphen der Höhenfunktion $h(t)$.
- Wie groß ist die mittlere Zuwachsrate der Höhe der Blume während des Beobachtungszeitraums?
- In welchem der vier Zeitintervalle wuchs die Tulpe am schnellsten?



Zeit t (Tage)	0	3	5	9	14
Höhe h (cm)	0	1	3	6	7

$$\frac{1}{3} = 0,33 \quad \frac{2}{5} = 0,4 \quad \frac{3}{4} = 0,75 \quad \frac{1}{5} = 0,2$$



WP_{L-R} max
Zunahme

WP_{R-L} max
Abnahme

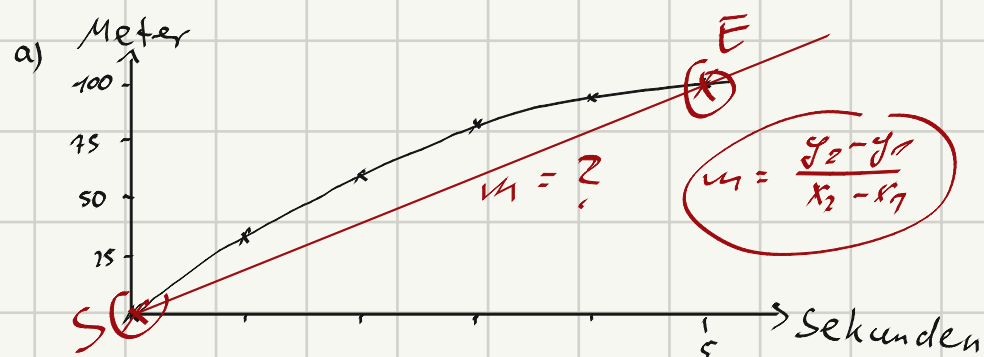
b)

$$S(0|0) \quad E(14|7) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 0}{14 - 0} = \underline{\underline{0,5 \frac{\text{cm}}{\text{d}}}}$$

c) Am schnellsten wächst die Tulpe zwischen dem 3. und dem 5. Tag.

7. Ein Auto bremsst ab. Der zur Zeit t zurückgelegte Weg ist $s(t) = 40t - 4t^2$ (Zeit t in s, Weg s in m).

- Skizzieren Sie den Graphen von s für $0 \leq t \leq 5$.
- Wann steht das Auto?
- Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des Autos?
- Bestimmen Sie die Momentangeschwindigkeit des Autos zu Beginn des Bremsmanövers ($t = 0$) angenähert.



b) Das Auto steht bei einer Geschwindigkeit von $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Daher: $v_s = v(t) = s'(t) = 40 - 8t$

$$\begin{aligned} 0 &= 40 - 8t & | +8t \\ 8t &= 40 & | :8 \\ t &= 5 \end{aligned}$$

Antwort: Das Auto steht nach genau 5 Sekunden.

c)

$$S(0|0) \quad E(5|100) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 0}{5 - 0} = 20 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \left[\hat{=} 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$$

d) $s'(0)$:

$$s'(0) = 40 - 8 \cdot 0$$

$$s'(0) = 40 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

nicht gefragt, aber interessant

$$\left[\hat{=} 144 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$$

3,6

Antwort: Ganz zu Beginn des Bremsmanövers ist das Auto $40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ($\hat{=} 144 \frac{\text{km}}{\text{h}}$) schnell.

17. Himmelfahrt

1980 baute AUDI das erste Serienfahrzeug der Welt mit Allradantrieb, den Audi quattro. In einem legendären Werbespot fuhr der Audi quattro die Sprungschanze von Kaipola in Finnland hinauf, die Steigungen von über 80% besitzt. 2005 wiederholte Audi das spektakuläre Experiment mit dem A6.

Die Schanze kann durch eine Parabel zweiten Grades modelliert werden. Die Maße kann man der Abbildung entnehmen.

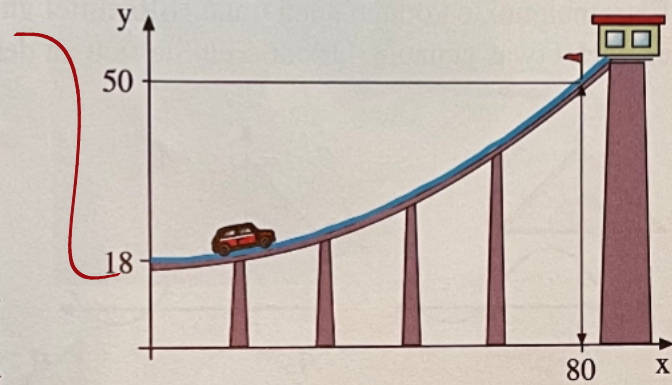
Wichtig: Der Schanzentisch läuft am Absprung horizontal aus.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

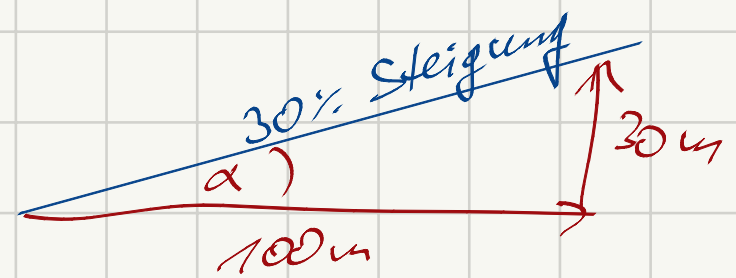
b) Wie groß ist die mittlere Steigung der Schanze im Intervall $[0; 80]$?

c) Das Fahrzeug schafft maximal einen Anstieg von $\alpha = 40^\circ$.
Schafft es das Auto bis zur Markierungsfahne?

d) Wie hoch würde ein normales Fahrzeug mit einer Steigfähigkeit von 25% kommen?



Steigung bei Straßen:



$$a) \quad SP(0|18) \\ P(80|50)$$

$$\Delta x = 80$$

$$\Delta y = 32$$

$$|\alpha| = \frac{\Delta y}{(\Delta x)^2} = \frac{32}{80^2} = \frac{1}{200}$$

$$\alpha = \frac{1}{200}$$

$$f(x) = \frac{1}{200} \cdot (x+0)^2 + 18$$

$$f(x) = \frac{1}{200} x^2 + 18$$

$$b) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{50 - 18}{80 - 0} = \frac{32}{80} = 0,4$$

Antwort: Die mittlere Steigung beträgt 0,4 Höhenmeter pro 1 Meter horizontale Entfernung

$$c) \quad \alpha = 40^\circ$$

$$\tan(\alpha) = m$$

$$\tan(40) \approx 0,839$$

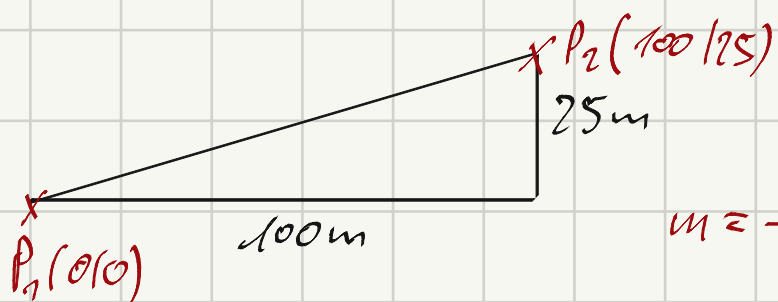
$$f'(x) = \frac{1}{100} x$$

$$0,839 = \frac{1}{100} \cdot x \quad | : \frac{1}{100}$$

$$\underline{83,9 = x}$$

Antwort: Ja, das Auto kommt sogar 3,90m weiter

$$d) \quad 25\%$$



$$m = \frac{25 - 0}{100 - 0} = \underline{0,25}$$

$$f'(x) = \frac{1}{100} x$$

$$0,25 = \frac{1}{100} \cdot x \quad | : \frac{1}{100}$$

$$25 = x$$

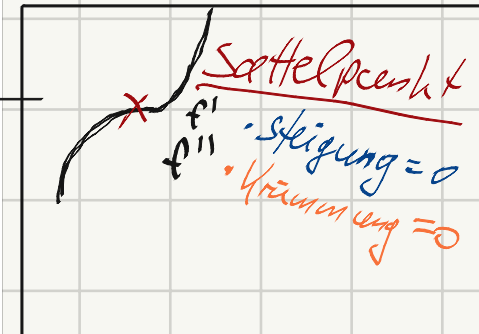
$$f(25) = \frac{1}{200} \cdot 25^2 + 18$$

$$f(25) = 21,125$$

Antwort: Ein normales Auto kommt nur 21,125 Meter hoch.

REKONSTRUKTION GANZRATIONALER FUNKTIONEN

Der Graph verläuft durch den Punkt P(4/-7)	$f(4) = -7$ (Triviale Punktinformation)
Der Graph der Funktion berührt die Abszissenachse bei x_a . <i>x-Wert im Aufgabentext z.B.: $x=3$</i>	x_a ist doppelte Nullstelle und Extremstelle $f(x_a) = 0$ (als Nullstelle interpretiert) $f'(x_a) = 0$ (als Extremum ")
Der Funktionsgraph hat bei x_a einen Extrempunkt.	$f'(x_a) = 0$
Der Funktionsgraph hat bei x_a einen Wendepunkt.	$f''(x_a) = 0$
Der Funktionsgraph hat bei x_a einen Sattelpunkt.	$f'(x_a) = 0$ 10 $f''(x_a) = 0$ 10
Der Funktionsgraph hat bei x_a die Steigung 10.	$f'(x_a) = 10$
Der Funktionsgraph hat bei x_a eine Tangente mit der Steigung 10.	$f'(x_a) = 10$
Der Funktionsgraph verläuft bei x_a parallel zur Geraden $g: g(x) = 10x + 6$.	$f'(x_a) = 10$
Der Graph der Funktion verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung.	Die Funktionsgleichung enthält nur ungerade Exponenten.
Der Graph der Funktion verläuft achsensymmetrisch zur Ordinatenachse.	Die Funktionsgleichung enthält nur gerade Exponenten.



Aufgaben:

- 3 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades der Form $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verläuft durch $P_1(-3/-12)$, durch $P_2(2/8)$ und durch den Ursprung.
- 4 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt die Abszissenachse bei $x = 3$ und verläuft durch $P(4/3)$ und $Q(1/4)$.
- 5 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat bei $x = 2$ eine Tangente mit der Steigung 38, bei $x = -\frac{1}{9}$ und bei $x = 0$ verlaufen die Tangenten parallel zur Abszissenachse. Die Ordinatenachse wird bei 1 geschnitten.
- 6 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat einen Extrempunkt $E(-2/0)$ und einen Wendepunkt $W(-1/-2)$.
- 7 Der Graph einer zur Ordinatenachse achsensymmetrischen ganzrationalen Funktion 4. Grades verläuft durch den Ursprung und hat einen Hochpunkt $H(2/4)$.
- 8 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat im Ursprung einen Sattelpunkt und bei $x = \frac{3}{2}$ einen Extrempunkt. Ferner verläuft er durch $P(1/-1)$.
- 9 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist achsensymmetrisch zur Ordinatenachse und schneidet diese bei 4. Die Abszissenachse wird bei $x = 2$ geschnitten. Bei $x = -1$ befindet sich eine Wendestelle.
- 10 Der Graph einer ganzrationalen Funktion der Form $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$ hat bei $x = 1$ einen Extrempunkt und bei $x = 2$ eine Wendestelle.
- 11 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades berührt die Abszissenachse bei $x = 2$ und hat Wendepunkte im Ursprung und bei $x = 1,5$. Die Steigung im Ursprung beträgt 1.
- 12 Der Wendepunkt des Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist $W(\frac{1}{2}/0)$. Die Nullstellen sind $x = -1$ und $x = 2$. Die Ordinatenachse wird in $(0/2)$ geschnitten.
- 13 Der Graph einer zum Ursprung punktsymmetrischen ganzrationalen Funktion 5. Grades hat den Sattelpunkt $W_S(1/8)$.
- 14 Der Sattelpunkt des Graphen einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist $W_S(1/0)$, der Hochpunkt $H(-2/4,5)$.

Vokabeln:

Abszisse(nachse): x-Achse
Ordinate(nachse): y-Achse

Symmetrie:

Achsensymmetrie: AUSSCHLIESSLICH gerade Exponenten

z.B.: $f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
 $\rightarrow f(x) = a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0$

Punktsymmetrie: AUSSCHLIESSLICH ungerade Exponenten

z.B.: $f(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
 $f(x) = a_5 x^5 + a_3 x^3 + a_1 x + a_0$

6 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat einen Extrempunkt $E(-2/0)$ und einen Wendepunkt $W(-1/-2)$.

Funktionswert

Bauplan:

$f(-2) = 0$

Steigung $\rightarrow f'(-2) = 0$

$f(-1) = -2$

$f''(-1) = 0$

Krümmung

$$\begin{aligned} a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 &= f(x) \\ 3 \cdot a_3 x^2 + 2 \cdot a_2 x + a_1 &= f'(x) \\ 6 \cdot a_3 x + 2 \cdot a_2 &= f''(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 \cdot (-2)^3 + a_2 \cdot (-2)^2 + a_1 \cdot (-2) + a_0 &= 0 \\ 3 \cdot a_3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot a_2 \cdot (-2) + a_1 &= 0 \\ a_3 \cdot (-1)^3 + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 &= -2 \\ 6 \cdot a_3 \cdot (-1) + 2 \cdot a_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 &= 0 \\ 12a_3 - 4a_2 + 1a_1 + 0 &= 0 \\ -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 &= -2 \\ -6a_3 + 2a_2 + 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=1 &= a_3 \\ y=3 &= a_2 \\ z=0 &= a_1 \\ t=-4 &= a_0 \end{aligned}$$

$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 0x - 4$

4 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt die Abszissenachse bei $x = 3$ und verläuft durch $P(4/3)$ und $Q(1/4)$. $\uparrow$

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = f(x)$$

$$3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1 = f'(x)$$

Beurteilen:

$$f(3) = 0$$

$$f'(3) = 0$$

$$f(4) = 3$$

$$f(1) = 4$$

$$a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 = 0$$

$$3 \cdot a_3 \cdot 3^2 + 2 \cdot a_2 \cdot 3 + a_1 + 0 = 0$$

$$a_3 \cdot 4^3 + a_2 \cdot 4^2 + a_1 \cdot 4 + a_0 = 3$$

$$a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = 4$$

$$27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 0$$

$$27a_3 + 6a_2 + 1a_1 + 0 = 0$$

$$64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 3$$

$$1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4$$

mit WTR:

$$a_3 = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = -\frac{11}{3}$$

$$a_1 = 4$$

$$a_0 = 3$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{3}x^2 + 4x + 3$$

(14)

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = f(x)$$

$$4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 = f'(x)$$

$$12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2 = f''(x)$$

Bauplan:

Sattelpunkt

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = 0$$

$$f''(1) = 0$$

Hauptpunkt

$$f(-2) = 4,5$$

$$f'(-2) = 0$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1a_4 & + & 1a_3 & + & 1a_2 & + & 1a_1 & + & 1a_0 & = & 0 \\ 4a_4 & + & 3a_3 & + & 2a_2 & + & 1a_1 & + & 0 & = & 0 \\ 12a_4 & + & 6a_3 & + & 2a_2 & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\ \\ 16a_4 & - & 8a_3 & + & 4a_2 & - & 2a_1 & + & 1a_0 & = & 4,5 \\ -32a_4 & + & 12a_3 & - & 4a_2 & + & 1a_1 & + & 0 & = & 0 \end{array}$$

— zu groß, um es mit dem WTR bestimmen zu können! ☹

↳ keine Lösung

(11)

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = f(x)$$

$$4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 = f'(x)$$

$$12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2 = f''(x)$$

(Gleichungsinformationen)

Bauplan:

$$f(2) = 0$$

$$f'(2) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f''(0) = 0$$

$$f''(1,5) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$32a_4 + 12a_3 + 4a_2 + 1a_1 + 0 = 0$$

$$0 + 0 + 0 + 0 + 1a_0 = 0$$

$$0 + 0 + 2a_2 + 0 + 0 = 0$$

$$27a_4 + 9a_3 + 3a_2 + 0 + 0 = 0$$

$$0a_4 + 0a_3 + 0a_2 + 1a_1 + 0a_0 = 1$$

— zu groß, um es mit dem WTR bestimmen zu können! ☹

↳ keine Lösung

12

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

$$f''(x) = 6a_3 x + 2a_2$$

$$\begin{array}{l|l} f(\frac{1}{2}) = 0 & 6a_3 \cdot (\frac{1}{2}) + 2a_2 + 0 + 0 = 0 \\ f'(\frac{1}{2}) = 0 & 3a_3 + 2a_2 + 0 + 0 = 0 \\ f(-1) = 0 & -a_3 + a_2 - a_1 + 1a_0 = 0 \\ f(2) = 0 & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0 \\ f(0) = 2 & 0 + 0 + 0 + 1a_0 = 2 \end{array} \Leftrightarrow$$

überbestimmt!
Eine Info
streichen!

mit dem WTR:

$$\begin{array}{l} x = a_3 = 2 \\ y = a_2 = -3 \\ z = a_1 = -3 \\ t = a_0 = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$$

⑧ 4. Grades
im Ursprung $\rightarrow (0|0)$ einen Sattelpunkt
bei $x = \frac{3}{2}$ Extrempunkt
 $P(1|-1)$

Aufg. ⑧

$$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = 4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

$$f''(x) = 12a_4 x^2 + 6a_3 x + 2a_2$$

Beurteilen:

$$\begin{array}{l|l} \text{Sp} & \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{array} \\ \text{Extr.} & f'(\frac{3}{2}) = 0 \\ P & f(1) = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 + 0 + 0 + 0 + a_0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + a_1 = 0 \\ 0 + 0 + 2a_2 = 0 \\ 4a_4(\frac{3}{2})^3 + 3a_3(\frac{3}{2})^2 + 2a_2(\frac{3}{2}) + a_1 = 0 \\ a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow a_0 = 0 \\ \Rightarrow a_1 = 0 \\ \Rightarrow 2a_2 = 0 \quad | :2 \\ \Rightarrow a_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 13,5a_4 + 6,75a_3 = 0 \\ a_4 + a_3 = -1 \end{array} \quad \cdot (-6,75)$$

$$\begin{array}{l} 13,5a_4 + 6,75a_3 = 0 \\ -6,75a_4 - 6,75a_3 = 6,75 \end{array} \quad \begin{array}{l} 6,75a_4 \\ a_4 \end{array} \quad \begin{array}{l} = 6,75 \\ = 1 \end{array} \quad | : 6,75$$

mit $a_4 + a_3 = -1$ und $a_4 = 1$: $1 + a_3 = -1 \quad | -1$
 $a_3 = -2$

$$f(x) = x^4 - 2x^3$$

⑤ 3. Grades ✓

bei $x=2$ Tangente mit $m=38$ ✓
bei $x=-\frac{1}{3}$ und $x=0$ Tangenten parallel zur x -Achse $m=0$
bei 1 Schnittp. mit y -Achse
 $S_y(0|1)$

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

Beurteilen:

$$\begin{array}{l|l} f'(2) = 38 & 3a_3 \cdot 2^2 + 2a_2 \cdot 2 + a_1 = 38 \\ f'(-\frac{1}{3}) = 0 & 3a_3 \cdot (-\frac{1}{3})^2 + 2a_2 \cdot (-\frac{1}{3}) + a_1 = 0 \\ f'(0) = 0 & 0 + 0 + a_1 = 0 \\ f(0) = 1 & 0 + 0 + 0 + a_0 = 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_0 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12a_3 + 4a_2 = 38 \\ \frac{1}{27}a_3 - \frac{2}{9}a_2 = 0 \end{array} \quad \cdot 18$$

$$\begin{array}{l} 12a_3 + 4a_2 = 38 \\ \frac{2}{3}a_3 - 4a_2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 38 \\ = 38 \end{array} \quad | : \frac{38}{3}$$

$$\frac{38}{3}a_3 = 3 \quad a_3 = 3$$

mit $12a_3 + 4a_2 = 38$
und $a_3 = 3$
 $12 \cdot 3 + 4a_2 = 38$
 $36 + 4a_2 = 38 \quad | -36$
 $4a_2 = 2 \quad | :4$
 $a_2 = 0,5$

$$f(x) = 3x^3 + 0,5x^2 + 1$$

(10)

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6x + 2b$$

$$\begin{array}{l} f'(1)=0 \\ f''(2)=0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot b \cdot 1 + c = 0 \\ 6 \cdot 2 + 2b = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3 + 2b + c = 0 \\ 12 + 2b = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} 12 + 2b = 0 \quad | -12 \\ 2b = -12 \quad | :2 \\ b = -6 \end{array}$$

$$3 + 2b + c = 0$$

$$3 + 2 \cdot (-6) + c = 0$$

$$3 - 12 + c = 0$$

$$-9 + c = 0 \quad | +9$$

$$\underline{c = 9}$$

$$\Rightarrow \underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}$$

(3)

$$P_1(-3|-12)$$

$$P_2(2|8)$$

$$P_3(0|0)$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\left| \begin{array}{l} (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = -12 \\ 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 8 \\ 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} -27 + 9a - 3b + c = -12 \\ 8 + 4a + 2b + c = 8 \\ 0 + 0 + 0 + c = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} +27 \\ -8 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} 9a - 3b + c = 15 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 0 + 0 + c = 0 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} x = a = 1 \\ y = b = -2 \\ z = c = 0 \end{array} \Rightarrow \underline{f(x) = x^3 + x^2 - 2x}$$

- ✓ 4. Grades
 ✓ achsensymmetrisch ☺
 ✓ verläuft durch Ursprung (0|0)
 HP (2|4)

Aufg. 7

$$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = 4a_4 x^3 + 2a_2 x$$

Bauplan:

$$\begin{array}{l} 1) f(0) = 0 \\ 2) f(2) = 4 \\ 3) f'(2) = 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a_4 \cdot 0^4 + a_2 \cdot 0^2 + a_0 = 0 \\ a_4 \cdot 2^4 + a_2 \cdot 2^2 + a_0 = 4 \\ 4a_4 \cdot 2^3 + 2a_2 \cdot 2 + 0 = 0 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 + 0 + 1a_0 = 0 \\ 16a_4 + 4a_2 + 1a_0 = 4 \\ 32a_4 + 4a_2 + 0 = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 16a_4 + 4a_2 + 1 \cdot 0 = 4 \\ 32a_4 + 4a_2 + 0 = 0 \end{array} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{array}{l} 16a_4 + 4a_2 = 4 \quad | :(-1) \\ 32a_4 + 4a_2 = 0 \end{array}$$

$$(\oplus) \quad \begin{array}{l} -16a_4 - 4a_2 = -4 \\ 32a_4 + 4a_2 = 0 \end{array}$$

$$\underline{16a_4 = -4 \quad | :16}$$

$$a_4 = -\frac{1}{4}$$

mit $16a_4 + 4a_2 = 4$ und $a_4 = -\frac{1}{4}$:

$$\begin{array}{rcl} 16 \cdot (-\frac{1}{4}) + 4a_2 & = & 4 \\ -4 + 4a_2 & = & 4 \quad | +4 \\ 4a_2 & = & 8 \quad | :4 \\ a_2 & = & 2 \end{array}$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 0}$$

9) $f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Wg. Symmetrie:

$$f(x) = a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0$$

$$f'(x) = 4a_4 x^3 + 2a_2 x$$

$$f''(x) = 12a_4 x^2 + 2a_2$$

$$f(0) = 4$$

$$f(2) = 0$$

$$f''(-1) = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} 0 + 0 + 1a_0 = 4 \\ 16a_4 + 4a_2 + 1a_0 = 0 \\ 12a_4 + 2a_2 + 0 = 0 \end{array} \right|$$

mit WTR:

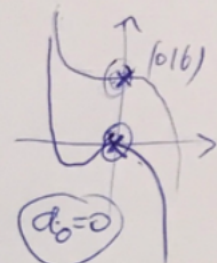
$$x = a_4 = \frac{1}{2}$$

$$y = a_2 = -3$$

$$z = a_0 = 4$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4}$$

- 13) • punktsym. zum Ursprung
 • 5. Grades
 • S(1|8) (- Sattelpunkt)



$$f(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Bauplan:

$$1) f(1) = 8$$

$$2) f'(1) = 0$$

$$3) f''(1) = 0$$

$$f(x) = a_5 x^5 + a_3 x^3 + a_1 x$$

$$f'(x) = 5a_5 x^4 + 3a_3 x^2 + a_1$$

$$f''(x) = 20a_5 x^3 + 6a_3 x$$

$$\left| \begin{array}{l} a_5 \cdot 1^5 + a_3 \cdot 1^3 + a_1 \cdot 1 = 8 \\ 5a_5 \cdot 1^4 + 3a_3 \cdot 1^2 + a_1 = 0 \\ 20a_5 \cdot 1^3 + 6a_3 \cdot 1 + 0 = 0 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} a_5 + a_3 + a_1 = 8 \\ 5a_5 + 3a_3 + a_1 = 0 \\ 20a_5 + 6a_3 + 0 = 0 \end{array} \right| \cdot (-1)$$

$$\left| \begin{array}{l} -a_5 - a_3 - a_1 = -8 \\ 5a_5 + 3a_3 + a_1 = 0 \\ 20a_5 + 6a_3 + 0 = 0 \end{array} \right| \xrightarrow{(\oplus)} \left| \begin{array}{l} 4a_5 + 2a_3 = -8 \\ 20a_5 + 6a_3 = 0 \end{array} \right| \cdot (-3)$$

$$(\oplus) \quad \left| \begin{array}{l} -12a_5 - 6a_3 = 24 \\ 20a_5 + 6a_3 = 0 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} 8a_5 = 24 \quad | :8 \\ a_5 = 3 \end{array}$$

mit $4a_5 + 2a_3 = -8$ und $a_5 = 3$

$$\begin{array}{l} 4 \cdot 3 + 2a_3 = -8 \\ 12 + 2a_3 = -8 \quad | -12 \\ 2a_3 = -20 \quad | :2 \\ a_3 = -10 \end{array}$$

mit $a_5 + a_3 + a_1 = 8$ und $a_5 = 3$ und $a_3 = -10$

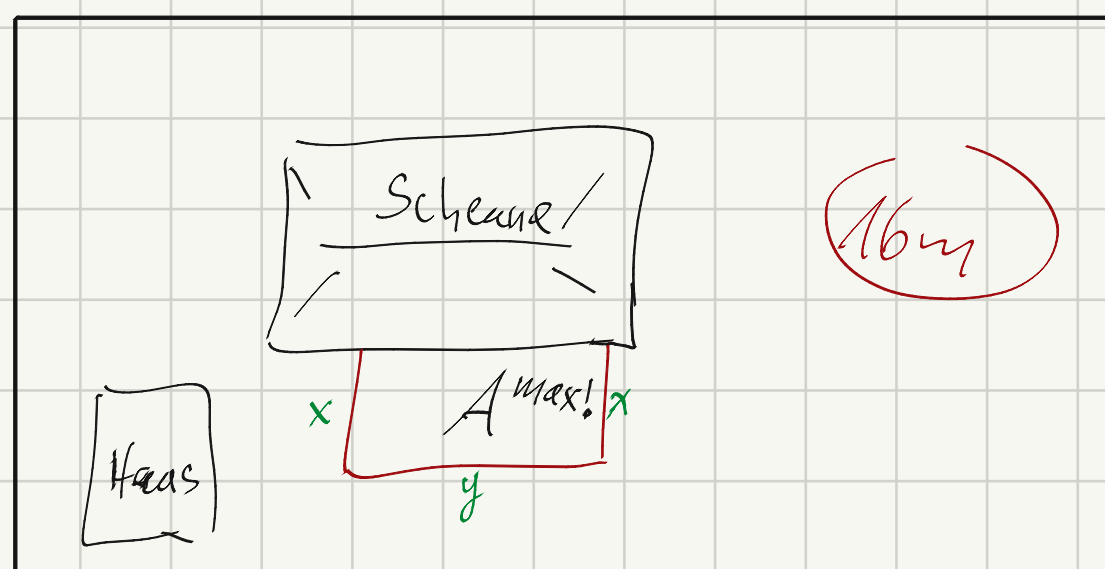
$$3 + (-10) + a_1 = 8$$

$$-7 + a_1 = 8 \quad | +7$$

$$a_1 = 15$$

$$\boxed{f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x}$$

EXTREMALPROBLEME / MAXIMIERUNGSPROBLEME / EXTREMWERTAUFGABEN



Das, was optimiert werden soll

Hauptbedingung (HB):

$$A = x \cdot y$$

Nebenbedingung (NB):

$$16 = 2x + y \quad | -2x$$

Das, was einschränkt

$$(16 - 2x) = y$$

$$A(x) = x \cdot (16 - 2x)$$

$$A(x) = 16x - 2x^2$$

Zielfunktion (ZF):

$$A(x) = -2x^2 + 16x$$

$$A'(x) = -4x + 16$$

$$A''(x) = -4$$

$$\text{notw. Bed.: } A'(x) = 0$$

$$0 = -4x + 16 \quad | -16$$

$$-16 = -4x \quad | :(-4)$$

$$4 = x$$

$$\text{hinr. Bed.: } A''(x) \neq 0$$

$$A''(4) = -4 \Rightarrow \text{Max!}$$

6p

$$x^* = 4$$

Kochrezept:

- 1) Formulieren der Hauptbedingung: Das, was maximiert, bzw. minimiert werden soll.
- 2) Formulieren der Nebenbedingung: Das, was uns einschränkt.
- 3) Nebenbedingung nach einer der beiden Variablen umformen.
- 4) Durch anwenden des Einsetzungsverfahrens (NB und HB einsetzen) Zielfunktion entwickeln.
- 5) Ableitungen (die ersten beiden)
- 6) Notwendige und hinreichende Bedingung für Extrempunkte ausführen und damit x^* (oder y^*) berechnen.
- 7) Welche konkrete(n) Frage(n) wird im Text gestellt. Durch gezieltes vorgehen finale Lösung entwickeln und Antwortsatz formulieren.

7p) Fragemöglichkeit 1:

Wie müssen die Abmessungen für den Hasenstall gewählt werden, wenn dessen Fläche möglichst groß werden soll?

→ Geht immer am schnellsten mit der umgeformten Nebenbedingung ←

$$y^* = 16 - 2x^* = 16 - 2 \cdot 4 = 16 - 8 = 8$$

Antwort: Der Stall muss 4 x 8 Meter groß sein.

Fragemöglichkeit 2:

Wie groß kann der Hasenstall im Optimalfall werden?

→ Geht immer am schnellsten mit der Zielfunktion ←

$$A(x) = -2x^2 + 16x$$

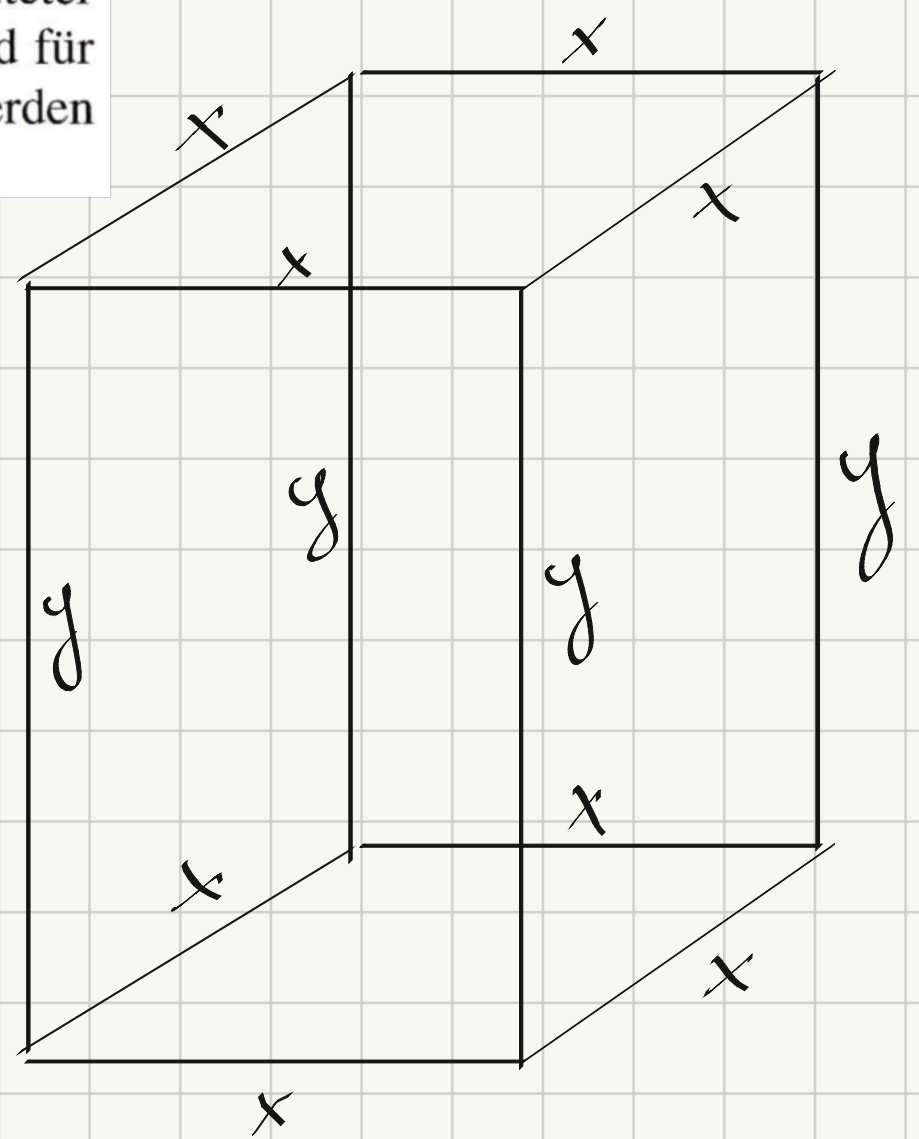
$$A(4) = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4$$

$$A(4) = 32$$

fertigen

Antwort: Der Stall kann maximal 32 Quadratmeter groß werden.

- 4 Aus einem Draht der Länge $l = 144$ cm soll ein durch seine Kanten angedeuteter Quader mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Welche Maße sind für die Kanten des Quaders zu wählen, wenn sein Volumen möglichst groß werden soll?



HB: $V = x^2 \cdot y$

NB: $144 = 8x + 4y \quad | :4$
 $36 - 2x = y$

ZF: $V(x) = x^2 \cdot (36 - 2x)$
 $V(x) = 36x^2 - 2x^3$

$V'(x) = 72x - 6x^2$

$V''(x) = 72 - 12x$

notw. Bed.: $V'(x) = 0$

$0 = 72x - 6x^2$

$0 = x \cdot (72 - 6x) \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$

$0 = 72 - 6x \quad | +6x$

$6x = 72 \quad | :6$

$x_2 = 12$

lin. Bed.: $V''(x)$

$V''(0) = 72 - 12 \cdot 0$

$V''(0) = 72 \Rightarrow \text{Min} \text{ (frowning face)}$

$V''(12) = 72 - 12 \cdot 12$

$V''(12) = -72 \Rightarrow \text{Max} \text{ (smiling face)}$

$\Rightarrow x^* = 12$

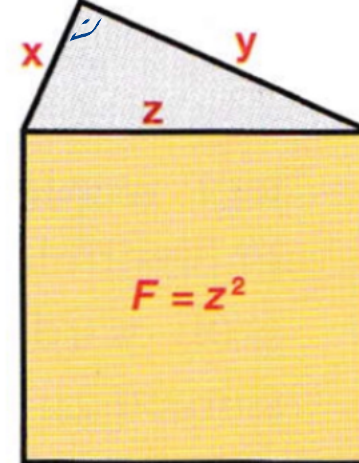
mit NB: $y = 36 - 2x$

$y^* = 36 - 2 \cdot x^* = 36 - 2 \cdot 12 = 36 - 24 = \underline{\underline{12}}$

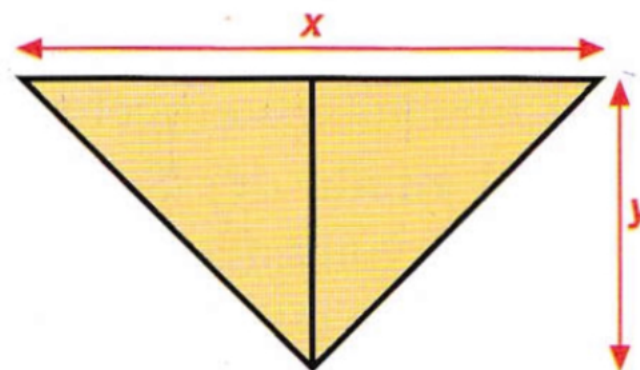
Antwort: Der volumenmaximale Quader ist ein Würfel mit einer Kantenlänge von 12 cm.

- 2 Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind zusammen 12 LE lang.

Wie groß sind die Katheten (x und y) zu wählen, damit das Quadrat F über der Hypotenuse z möglichst klein wird? Wie groß ist das Hypotenusenquadrat dann?



- 3 Der Querschnitt eines Kanals ist ein gleichschenkeliges Dreieck. Aus bautechnischen Gründen soll $x + y = 23$ sein. Welche Maße sind für x und y zu wählen, damit der Querschnitt des Kanals möglichst groß wird? Wie groß ist er dann?



- 4 Aus einem Draht der Länge $l = 144$ cm soll ein durch seine Kanten angedeuteter Quader mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Welche Maße sind für die Kanten des Quaders zu wählen, wenn sein Volumen möglichst groß werden soll?

3

HB: $A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$

NB: $23 = x + y \quad -x$

$$23 - x = y$$

ZF: $A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (23 - x)$

$$A(x) = 11,5x - \frac{1}{2}x^2$$

$$A'(x) = 11,5 - x$$

$$A''(x) = -1$$

notw. Bed.: $A'(x) = 0$

$$0 = 11,5 - x \quad | +x$$

$$x = 11,5$$

hinr. Bed.: $A''(x) \neq 0$

$$A''(11,5) = -1 \Rightarrow \text{Max!}$$

$$\boxed{x^* = 11,5}$$

$$y^* = 23 - x^* = 23 - 11,5 = 11,5$$

$$\Rightarrow \underline{x^* = y^* = 11,5 \text{ LE}}$$

$$A^* = \frac{1}{2} \cdot 11,5 \cdot 11,5 = \underline{66,125 \text{ FE}}$$

Antwort: Der Kanal hat bei einer Wahl von 11,5 LE für x und y eine maximale Querschnittsfläche von 66,125 FE.

2

$$HB: F = z^2 = x^2 + y^2$$

$$NB: 12 = x + y \quad | -x$$

$$12 - x = y$$

$$\underline{ZF:} \quad F(x) = x^2 + (12 - x)^2$$

$$F(x) = x^2 + \underline{144 - 24x + x^2}$$

$$F(x) = 2x^2 - 24x + 144$$

$$F'(x) = 4x - 24$$

$$F''(x) = 4$$

$$\underline{\text{notw. Bed.: } F'(x) = 0}$$

$$0 = 4x - 24 \quad | +24$$

$$24 = 4x$$

$$\underline{6 = x}$$

$$| :4$$

$$\underline{\text{int. Bed.: } F''(x) \neq 0}$$

$$F''(6) = 4$$

$$\Rightarrow \text{Min } (\ddot{ })$$

$$\boxed{x^* = 6}$$

$$y^* = 12 - x^* = 12 - 6 = 6$$

$$\Rightarrow \underline{x^* = y^* = 6 \text{ LE}}$$

$$\boxed{F^* = 6^2 + 6^2 = \underline{72 \text{ FE}}}$$

Übung 9 (Oberflächenformel)

Eine Firma stellt oben offene Regentonnen für Hobbygärtner her. Diese sollen bei gegebenem Materialbedarf maximales Volumen besitzen.

- a) Wie sind die Abmessungen zu wählen, wenn 2 m^2 Material je Regentonne zur Verfügung stehen?
b) Lösen Sie die Aufgabe allgemein.



Kreis:

$$A = \pi \cdot r^2$$

$$u = 2\pi \cdot r$$

HB: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

NB: $2 = 2\pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2 \quad | -\pi r^2$

$$2 - \pi r^2 = 2\pi \cdot r \cdot h \quad | : 2\pi r$$

$$\frac{2 - \pi r^2}{2\pi r} = h$$

$$\frac{\cancel{2}}{2\pi r} - \frac{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}{2\cancel{\pi} r} = h$$

$$\frac{1}{\pi r} - \frac{1}{2} r = h$$

ZF: $V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{\pi r} - \frac{1}{2} r \right)$

$$V(r) = \frac{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}{\cancel{\pi} r} - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V(r) = r - \frac{1}{2} \pi r^3$$

$$V'(r) = 1 - 1,5\pi r^2$$

$$V''(r) = -3\pi r$$

notw. Bed.: $V'(r) = 0$

$$0 = 1 - 1,5\pi r^2 \quad | + 1,5\pi r^2$$

$$1,5\pi r^2 = 1 \quad | : 1,5\pi$$

$$r^2 = \frac{1}{1,5\pi} \quad | \sqrt{}$$

$$r_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{1,5\pi}} \approx \pm 0,4607$$

hinr. Bed.: $V''(r) \neq 0$

$$V''(0,4607) = -3 \cdot \pi \cdot 0,4607$$

$$V''(0,4607) \approx -4,3 \Rightarrow \text{Max } \textcircled{+}$$

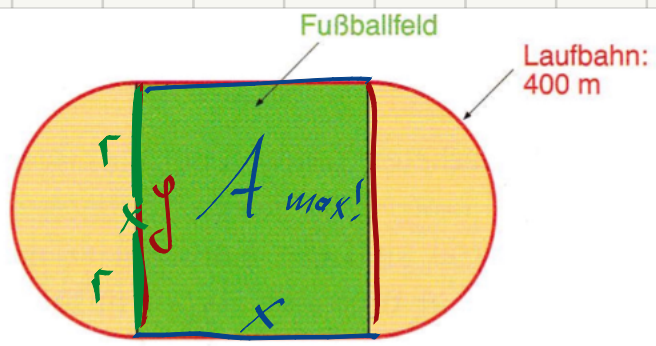
$$V''(-0,4607) = -3 \cdot \pi \cdot (-0,4607)$$

$$V''(-0,4607) \approx 4,3 \Rightarrow \text{Min } \textcircled{-} \Rightarrow \underline{\underline{r^* = 0,4607 \text{ (m)}}}$$

$$h^* = \frac{1}{\pi r^*} - \frac{1}{2} r^* = \frac{1}{\pi \cdot 0,4607} - \frac{1}{2} \cdot 0,4607 \approx 0,4606 \text{ (m)}$$

Antwort: Bei einem Radius von etwa 0,46 m und einer Höhe von ebenso etwa 0,46 m ergibt sich eine volumenmaximale Regentonne, die einen Materialaufwand von exakt zwei Quadratmeter aufweist.

9 In einem Sportstadion soll eine 400-Meter-Laufbahn (bestehend aus 2 parallelen Geraden und 2 angesetzten Halbkreisen) so angelegt werden, dass das integrierte Fußballfeld (Rechteck) möglichst groß wird. Wie sind die Abmessungen zu wählen?



HB: $A = x \cdot 2r$

NB: $400 = 2 \cdot \pi \cdot r + 2x \quad | -2\pi r$

$400 - 2\pi r = 2x \quad | :2$

$200 - \pi r = x$

$y = 2 \cdot r$

ZF:

$A(r) = (200 - \pi r) \cdot 2 \cdot r$

$A(r) = 400r - 2\pi r^2$

$A(r) = -2\pi r^2 + 400r$

$A'(r) = -4\pi r + 400$

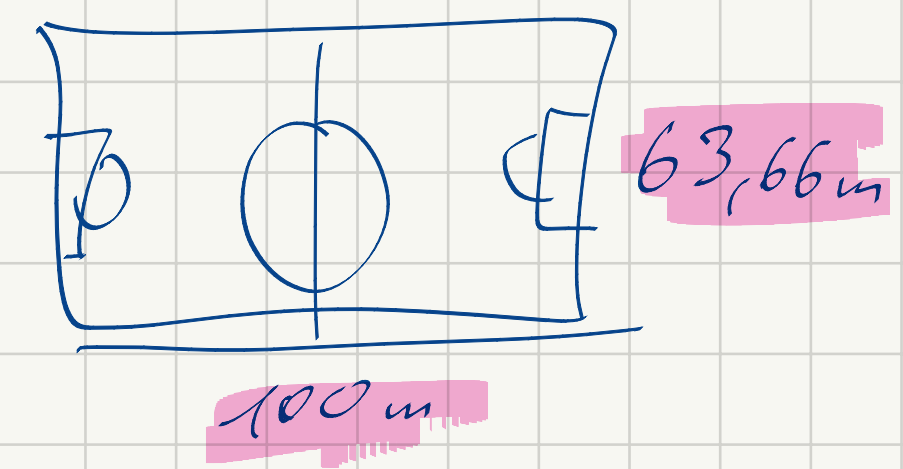
$A''(r) = -4\pi$

notw. Bed.: $A'(r) = 0$ $0 = -4\pi r + 400 \quad +4\pi r$ $4\pi r = 400 \quad :4$ $\pi r = 100 \quad :\pi$ $r = \frac{100}{\pi}$	hinr. Bed.: $A''(r) \neq 0$ $A''\left(\frac{100}{\pi}\right) = -4\pi \Rightarrow \text{Max}(\text{!})$ $r^* = \frac{100}{\pi} \approx 31,83$
--	--

Länge: $y^* = 2 \cdot r^* = 2 \cdot 31,83 = \underline{\underline{63,66}}$

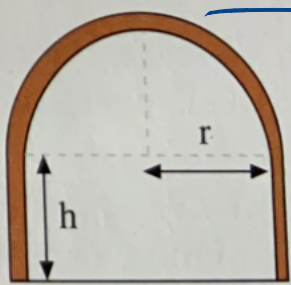
Breite: $x^* = 200 - \pi r^* = 200 - \frac{\cancel{\pi} 100}{\cancel{\pi}} = \underline{\underline{100}}$

Antwort:



Übung 3

Ein Tunnel soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten. Wie groß ist die Querschnittsfläche maximal, wenn der Umfang des Tunnels 20m betragen soll?



S. 165

$$\text{HB: } A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 + 2r \cdot h$$

$$\text{NB: } 20 = 2h + 2r + \frac{1}{2} \cdot 2\pi r$$

$$20 = 2h + 2r + \pi r$$

$$20 - 2r - \pi r = 2h$$

$$10 - r - \frac{1}{2}\pi r = h$$

$$\begin{array}{l} | -2r \quad | -\pi r \\ | : 2 \end{array}$$

$$\text{ZF: } A(r) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot r \cdot (10 - r - \frac{1}{2} \pi r)$$

$$A(r) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 + 20r - 2r^2 - \pi r^2$$

$$A(r) = -\frac{1}{2} \pi r^2 - 2r^2 + 20r$$

$$A(r) = (-\frac{1}{2}\pi - 2) \cdot r^2 + 20r$$

$$\begin{aligned} A'(r) &= 2 \cdot (-\frac{1}{2}\pi - 2) \cdot r + 20 \\ &= (-\pi - 4)r + 20 \end{aligned}$$

$$A''(r) = -\pi - 4$$

$$\text{notw. Bed.: } A'(r) = 0$$

$$0 = (-\pi - 4) \cdot r + 20$$

$$-20 = (-\pi - 4) \cdot r$$

$$\frac{-20}{-\pi - 4} = r$$

$$\frac{-1 \cdot (20)}{-1 \cdot (\pi + 4)} = r$$

$$r = \frac{20}{\pi + 4} \approx 2,8$$

$$\begin{array}{l} | -20 \\ | : (-\pi - 4) \end{array}$$

$$\text{hinr. Bed.: } A''(r) \neq 0$$

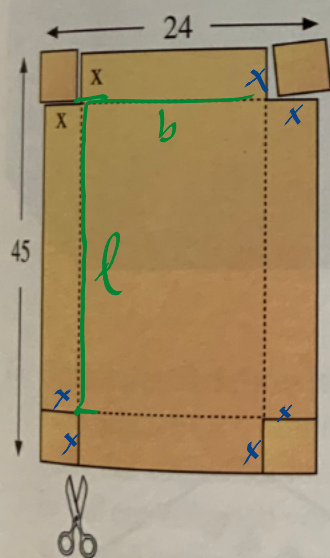
$$A''\left(\frac{20}{\pi + 4}\right) = -\pi - 4 \Rightarrow \text{Max!} \quad \text{☺}$$

$$r^* = \frac{20}{\pi + 4} \approx 2,8$$

$$A\left(\frac{20}{\pi + 4}\right) = \left(-\frac{1}{2}\pi - 2\right) \cdot \left(\frac{20}{\pi + 4}\right)^2 + 20 \cdot \frac{20}{\pi + 4}$$

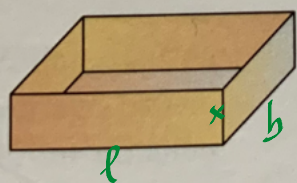
$$A\left(\frac{20}{\pi + 4}\right) \approx 28$$

Antwort: Die maximale Querschnittsfläche beträgt etwa 28 Quadratmeter.



17. Aus einem rechteckigen Stück Pappe von 45 cm Länge und 24 cm Breite soll eine oben offene Schachtel hergestellt werden. Dazu wird an jeder der vier Ecken ein Quadrat abgeschnitten. Anschließend werden die überstehenden Streifen hochgeklappt. Wie groß müssen die Quadrate sein, damit das Volumen der Schachtel maximal wird?

$V_{\max}$:



$$V = l \cdot b \cdot x$$

HB: $V = l \cdot b \cdot x$

NB₁: $24 = b + 2x \Leftrightarrow (24 - 2x) = b$

NB₂: $45 = l + 2x \Leftrightarrow (45 - 2x) = l$

ZF: $V(x) = [(45 - 2x) \cdot (24 - 2x)] \cdot x$

$$V(x) = (1080 - 90x - 48x + 4x^2) \cdot x$$

$$V(x) = (1080 - 138x + 4x^2) \cdot x$$

$$V(x) = 1080x - 138x^2 + 4x^3$$

$$V(x) = 4x^3 - 138x^2 + 1080x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 276x + 1080$$

$$V''(x) = 24x - 276$$

notw. Bed.: $V'(x) = 0$

$$0 = 12x^2 - 276x + 1080 \quad | :12$$

$$0 = x^2 - 23x + 90$$

$$x_{1,2} = 11,5 \pm \sqrt{11,5^2 - 90}$$

$$x_{1,2} = 11,5 \pm 6,5$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 18$$

hinr. Bed.: $V''(x) \neq 0$

$$V''(5) = 24 \cdot 5 - 276$$

$$V''(5) = -156 \Rightarrow \text{Max } (\cap)$$

$$V''(18) = 24 \cdot 18 - 276$$

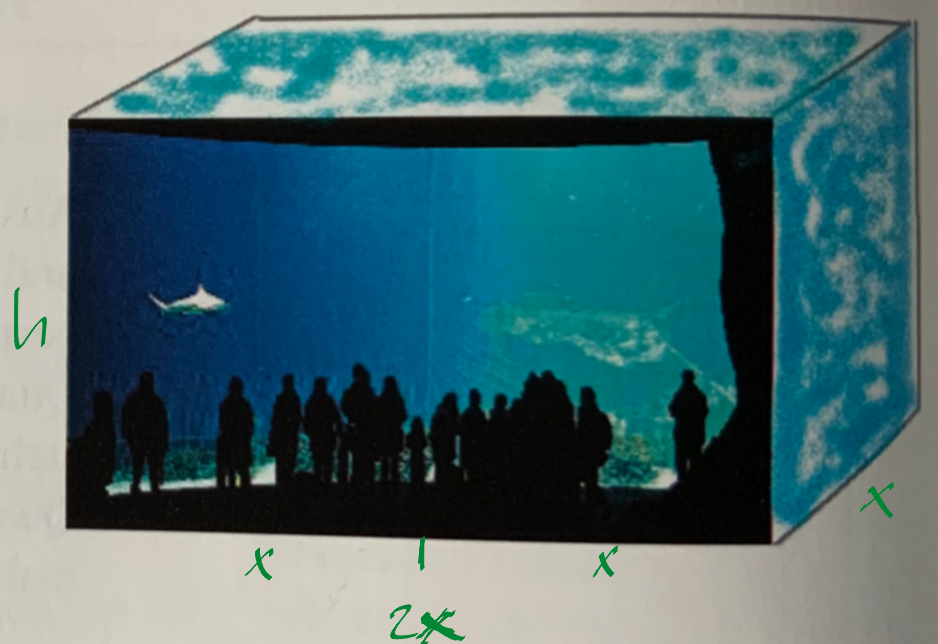
$$V''(18) = 156 \Rightarrow \text{Min } (\cup)$$

$$x^* = 5$$

Antwort: Der Einschnitt x muss exakt 5 cm tief sein, damit das Volumen der Schachtel maximal wird.

21. Aquarium

Zoodirektor Dr. Brinkmann plant ein neues Aquarium. Es soll doppelt so lang wie breit werden. Oben ist es offen. Das Glas für die Bodenplatte kostet 300 €/m^2 , das Glas für die Seitenscheiben ist mit nur 250 €/m^2 etwas preiswerter. Das Aquarium soll ein Fassungsvermögen von 200 m^3 erhalten. Welche Maße muss Dr. Brinkmann wählen, damit sein neues Aquarium möglichst billig wird? Wie hoch ist der Preis?



S. 178

$$\text{HB: } P = \underbrace{300 \cdot 2x^2}_{\text{Preis Boden}} + \underbrace{250 \cdot 6xh}_{\text{Preis Seiten}}$$

$$\text{NB: } 200 = 2x^2 \cdot h \quad | : 2x^2$$

$$\frac{200}{2x^2} = h$$

$$\frac{100}{x^2} = h$$

$$\text{ZF: } P(x) = 300 \cdot 2x^2 + 250 \cdot 6 \cdot x \cdot \frac{100}{x^2}$$

$$P(x) = 600x^2 + \frac{150000 \cdot x}{x^2}$$

$$P(x) = 600x^2 + \frac{150000}{x}$$

$$P(x) = 600x^2 + 150000 \cdot \frac{1}{x}$$

$$P(x) = 600x^2 + 150000x^{-1}$$

$$P'(x) = 1200x - 150000 \cdot x^{-2} = 1200x - \frac{150000}{x^2}$$

$$P''(x) = 1200 + 300000 \cdot x^{-3} = 1200 + \frac{300000}{x^3}$$

notw. Bed.: $P'(x) = 0$

$$0 = 1200x - \frac{150000}{x^2} \quad | + \frac{150000}{x^2}$$

$$\frac{150000}{x^2} = 1200x$$

$$150000 = 1200x^3$$

$$125 = x^3$$

$$\underline{5 = x}$$

$$h^* = \frac{100}{(x^*)^2} = \frac{100}{5^2} = 4$$

Maße: Länge: $2x^* = 2 \cdot 5 = 10\text{ (m)}$

Breite: $x = 5\text{ (m)}$

Höhe: 4 (m)

Vorüberlegungen:

Bodenplatte: $A = x \cdot 2x$
 $A = 2x^2$

$300 \frac{\text{€}}{\text{m}^2}$

Seitenteile: links/rechts $A = 2 \cdot x \cdot h$
 vorne/hinten $A = 2 \cdot 2x \cdot h$

$$A = 2xh + 4xh = 6xh$$

$A = 6xh$

$250 \frac{\text{€}}{\text{m}^2}$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = x \cdot 2x \cdot h$$

$$V = 2x^2 \cdot h$$

hinr. Bed.: $P''(x) \neq 0$

$$P''(5) = 1200 + \frac{300000}{5^3}$$

$$P''(5) = 3600 \Rightarrow \text{Min!}$$

$x^* = 5$

$$P(5) = 600 \cdot 5^2 + 150000 \cdot 5^{-1}$$

$P(5) = 45.000\text{ (€)}$

Antwort:

Mit den Maßen $10 \times 5 \times 4$ Meter (l x b x h) ergibt sich eine kostenminimale Konstellation für das Aquarium in einer Höhe von 45.000 € .

22. Medikamentenschachtel

Für ein Vitaminpräparat soll eine neue Schachtel entworfen werden. Sie soll für die bunten Vitaminperlen 48cm^3 Raum bereithalten. Ihre Breite sei x , ihre Tiefe y und ihre Höhe $\frac{x}{4}$. $\rightarrow 0,25x$

Die Schachtel funktioniert wie eine Streichholzschachtel. Sie besteht aus einem oben offenen ausziehbaren Behälter und einer umgebenden Schiebehülle.

Das Netz dieser beiden Teile ist rechts abgebildet. Wie müssen die Maße der Schachtel gewählt werden, damit der Materialverbrauch minimal wird?



Schachtel = Schublade + Hülle

$$\begin{aligned} \text{HB: } A &= \overbrace{2,5x \cdot y}^{\text{Schiebehülle}} + \overbrace{1,5x \cdot (y+0,5x)}^{\text{Schublade}} \\ A &= 2,5xy + 1,5xy + 0,75x^2 \\ A &= 4xy + 0,75x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NB: } 48 &= x \cdot y \cdot \frac{x}{4} \\ 48 &= x \cdot y \cdot 0,25x \\ 48 &= 0,25x^2 \cdot y \quad | : 0,25x^2 \\ \frac{48}{0,25x^2} &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ZF: } A(x) &= 4x \cdot \frac{48}{0,25x^2} + 0,75x^2 \\ A(x) &= \frac{4 \cdot x \cdot 48}{0,25x^2} + 0,75x^2 \\ A(x) &= \frac{192}{0,25x} + 0,75x^2 \\ A(x) &= \frac{192}{0,25} \cdot \frac{1}{x} + 0,75x^2 \\ A(x) &= 768 \cdot x^{-1} + 0,75x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'(x) &= -768x^{-2} + 1,5x \\ A''(x) &= 1536x^{-3} + 1,5 \end{aligned}$$

• notw. Bed.: $A'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -768x^{-2} + 1,5x \quad | +768x^{-2} \\ 768 \cdot x^{-2} &= 1,5x \\ \frac{768}{x^2} &= 1,5x \quad | \cdot x^2 \\ 768 &= 1,5x^3 \quad | : 1,5 \\ 512 &= x^3 \quad | \sqrt[3]{} \\ \underline{\underline{8}} &= x \end{aligned}$$

• hinr. Bed.: $A''(x) \neq 0$

$$A''(8) = 1536 \cdot 8^{-3} + 1,5$$

$$A''(8) = 4,5 \Rightarrow \text{Min}(\text{!})$$

$$\boxed{x^* = 8}$$

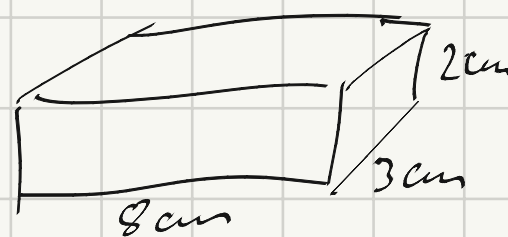
Maße:

Breite: $x^* = 8$

Tiefe: $y^* = \frac{48}{0,25(x^*)^2} = \frac{48}{0,25 \cdot 8^2} = 3$

Höhe: $h^* = \frac{x^*}{4} = \frac{8}{4} = 2$

Antwort:



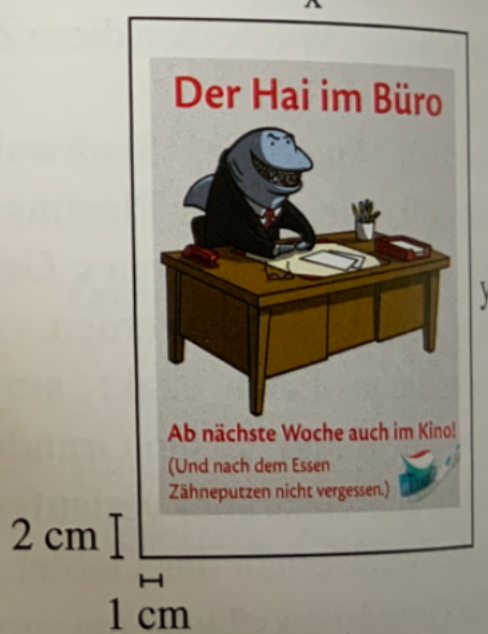
23. Optimales Flugblatt

Ein Flugblatt soll eine bedruckte Fläche von 288 cm^2 besitzen.

Oben und unten sollen jeweils 2 cm Rand frei bleiben, rechts und links jeweils 1 cm. x und y seien die Maße der bedruckten Fläche.

Welche Maße muss das Flugblatt erhalten, wenn der Materialaufwand möglichst klein sein soll?

(Wie verändern sich die Ergebnisse, wenn alle Ränder 1 cm breit sein sollen?)



S. 178

$$HB: A = (x+2) \cdot (y+4)$$

$$NB: 288 = x \cdot y \quad | :x$$
$$\frac{288}{x} = y$$

min!

$$ZF: A(x) = (x+2) \cdot \left(\frac{288}{x} + 4\right)$$

$$A(x) = 288 + 4x + \frac{576}{x} + 8$$

$$A(x) = 4x + 296 + \frac{576}{x}$$

$$A(x) = 4x + 296 + 576 \cdot x^{-1}$$

$$\frac{576}{x} = 576 \cdot \frac{1}{x} = 576 \cdot x^{-1}$$

$$A'(x) = 4 - 576 \cdot x^{-2}$$

$$A''(x) = 1152 \cdot x^{-3}$$

notw. Bed.: $A'(x) = 0$

$$0 = 4 - 576 \cdot x^{-2}$$

$$0 = 4 - \frac{576}{x^2} \quad | + \frac{576}{x^2}$$

$$\frac{576}{x^2} = 4 \quad | \cdot x^2$$

$$576 = 4 \cdot x^2 \quad | :4$$

$$144 = x^2 \quad | \sqrt{}$$

$$12 = x_1$$

$$-12 = x_2$$

← bezogen auf den Sachverhalt unsinnig.

$$\Rightarrow x^* = 12$$

$$-576 \cdot x^{-2} = -576 \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{576}{x^2}$$

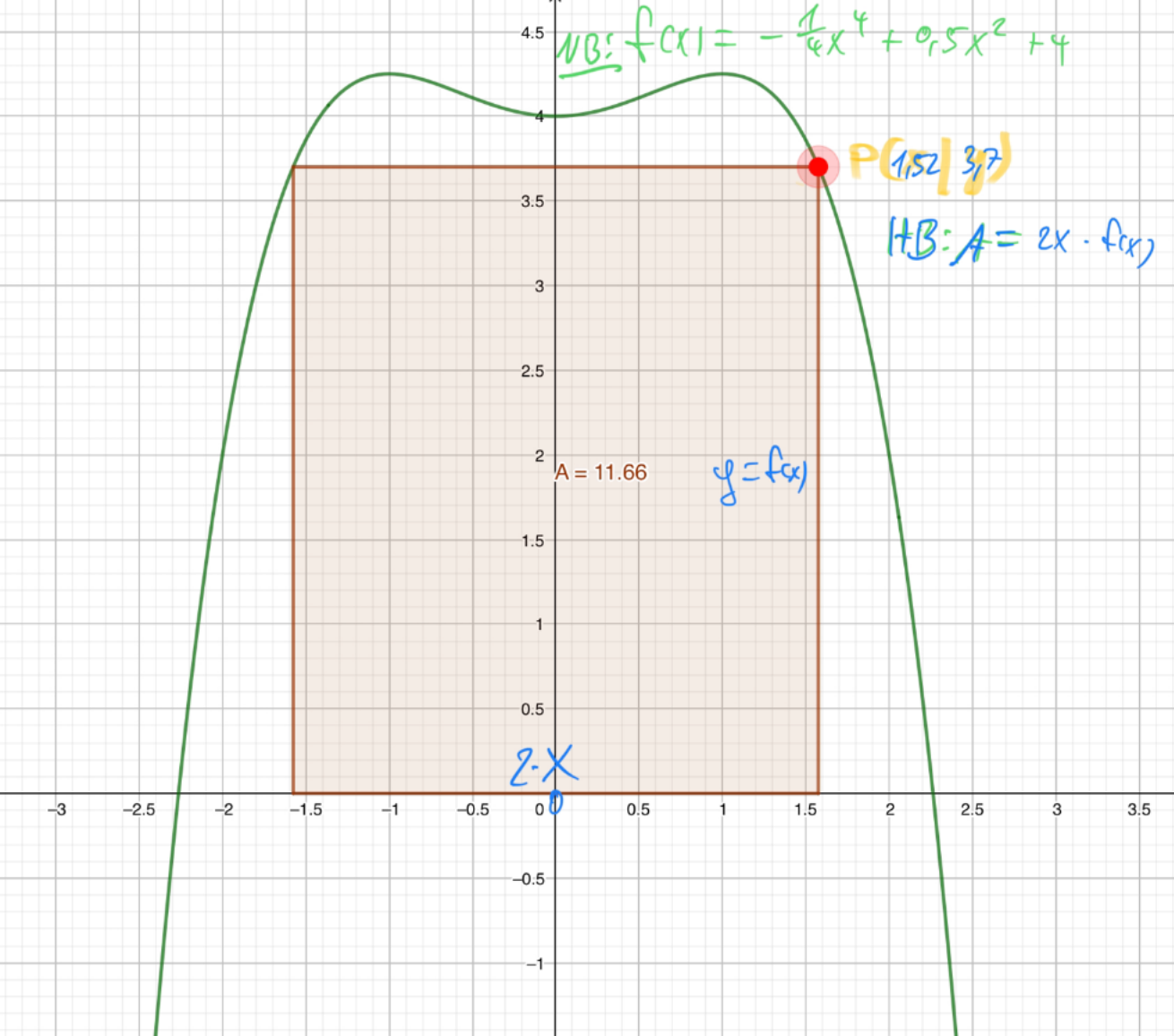
$$y^* = \frac{288}{x^*} = \frac{288}{12} = 24$$

Maße komplettes Papier:

$$\text{Höhe} = y^* + 4 = 24 + 4 = 28$$

$$\text{Breite} = x^* + 2 = 12 + 2 = 14$$

Antwort: Das Flugblatt muss $28 \times 14 \text{ cm}$ groß sein.



$$HB: A = 2x \cdot f(x)$$

$$NB: f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 0.5x^2 + 4$$

$$ZF: A(x) = 2x \cdot \left(-\frac{1}{4}x^4 + 0.5x^2 + 4\right)$$

$$A(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^3 + 8x$$

$$A'(x) = -2.5x^4 + 3x^2 + 8$$

$$A''(x) = -10x^3 + 6x$$

notw. Bed.: $A'(x) = 0$

$$0 = -2.5x^4 + 3x^2 + 8$$

substituiere:

$$x^2 = z$$

$$x^4 = z^2$$

$$0 = -2.5z^2 + 3z + 8 \quad | :(-2.5)$$

$$0 = z^2 - \frac{6}{5}z - \frac{16}{5}$$

$$z_{1,2} = \frac{3}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}}$$

$$z_{1,2} \approx \frac{3}{5} \pm 1.8868$$

$$z_1 = 2.4868$$

$$z_2 = -1.2868$$

resubstituiere:

mit $x^2 = z$

für $z_1 = 2.4868$

für $z_2 = -1.2868$

$$x^2 = 2.4868 \quad | \sqrt{}$$

$$x^2 = -1.2868 \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 \approx 1.577$$

$$x_3 = \text{u. d.}$$

$$x_2 \approx -1.577$$

$$x_4 = \text{u. d.}$$

lin. Bed.: $A''(x) \neq 0$

$$A''(1.577) = -10 \cdot 1.577^3 + 6 \cdot 1.577$$

$$A''(1.577) \approx -29.75 \Rightarrow \text{Max}(\text{!})$$

$$A''(-1.577) = -10 \cdot (-1.577)^3 + 6 \cdot (-1.577)$$

$$A''(-1.577) \approx 29.75 \Rightarrow \text{Min}(\text{!})$$

$$\underline{x^* = 1.577}$$

Vervollständigung Punkt P:

$$f(1.577) = -0.25 \cdot 1.577^4 + 0.5 \cdot 1.577^2 + 4$$

$$f(1.577) \approx 3.697$$

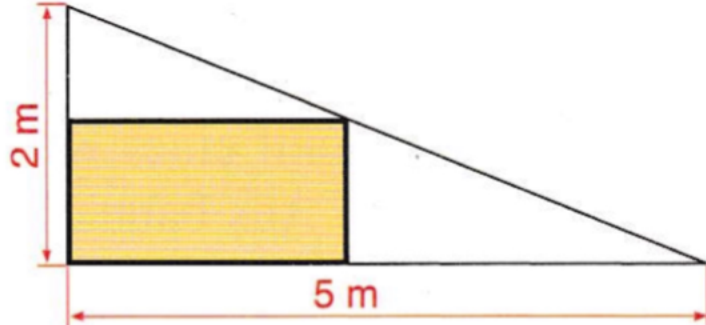
$$\underline{\underline{P(1.577 | 3.697)}}$$

maximal möglicher Flächeninhalt

$$ZF: A(1.577) = -0.5 \cdot 1.577^5 + 1.577^3 + 8 \cdot 1.577$$

$$\underline{\underline{A(1.577) \approx 11.661 \text{ (cm}^2\text{)}}}$$

10 In die Abseite¹⁾ eines Dachbodens soll wie in der Skizze angegeben der Lüftungsschacht einer Klimaanlage eingebaut werden. Wie sind Länge und Breite des Schachtes zu wählen, damit die Querschnittsfläche und damit das Durchflussvolumen möglichst groß wird?



HB: $A = x \cdot y = x \cdot g(x)$

NB: $g(x) = -0,4x + 2$

ZF: $A(x) = x \cdot (-0,4x + 2)$

$A(x) = -0,4x^2 + 2x$

$A'(x) = -0,8x + 2$

$A''(x) = -0,8$

* notw. Bed.: $A'(x) \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & -0,8x + 2 \\ 0,8x & = & 2 \\ 2,5 & = & x \end{array} \quad \begin{array}{l} | +0,8x \\ |:0,8 \end{array}$$

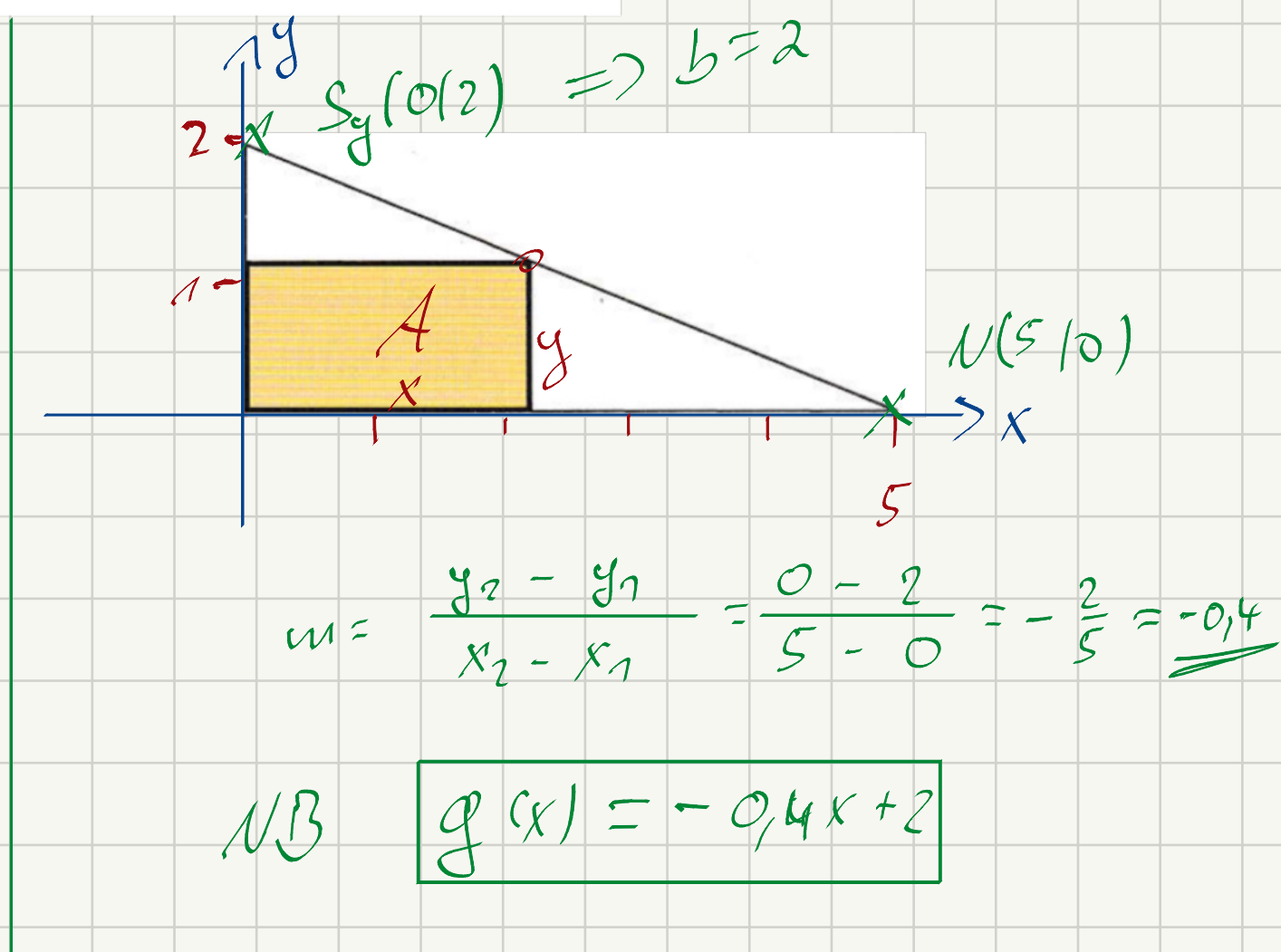
* hinr. Bed.: $A''(x)$

$A''(2,5) = -0,8 \Rightarrow \text{Max!}$

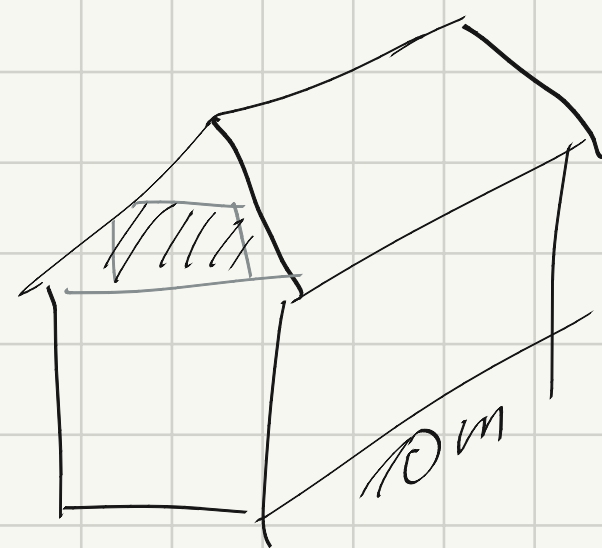
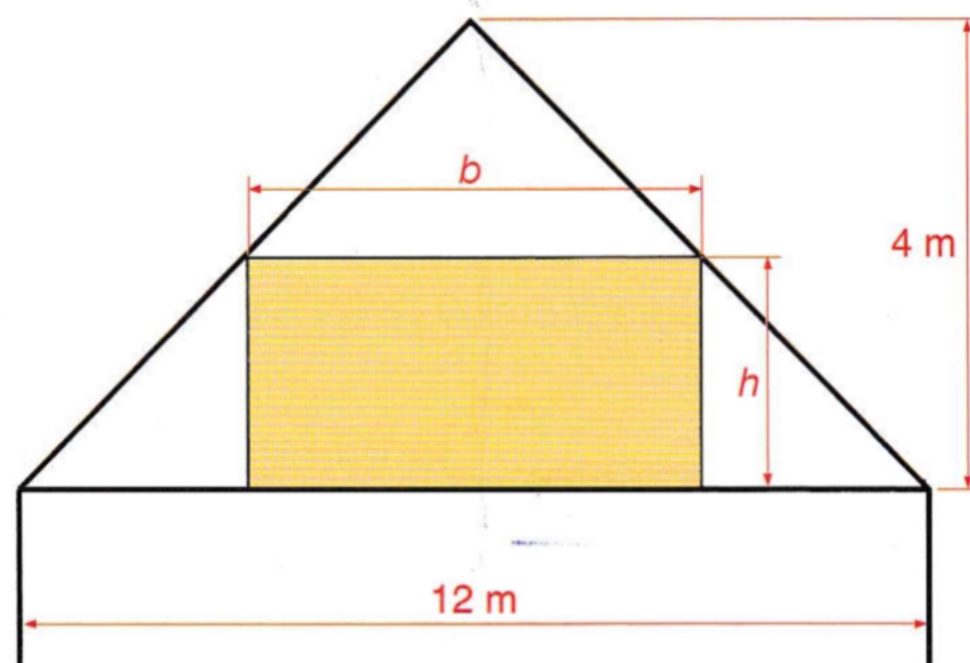
Punktvervollst.:

$g(2,5) = -0,4 \cdot 2,5 + 2$

$g(2,5) = 1$

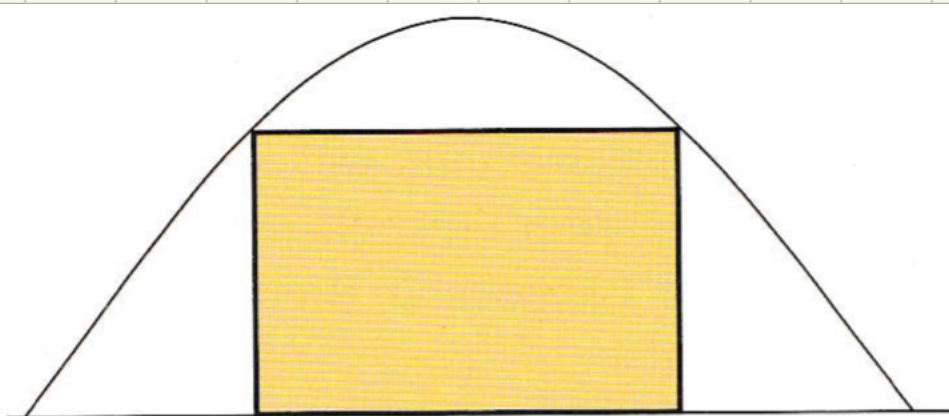


- 12 Im Dachbodenraum eines Kindergartens soll ein Zimmer eingerichtet werden. Die Länge des Dachbodens beträgt 10 m. Berechnen Sie das maximale Volumen des neuen Raumes und die dazugehörige maximale Wohnfläche.

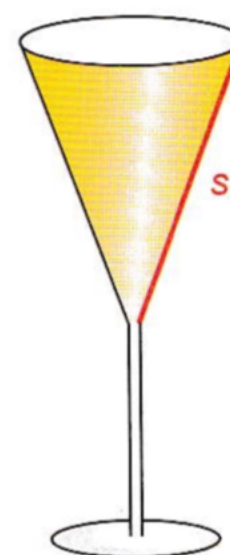


- 13 Die Seitenwand eines Flugzeughangars hat die Form eines Graphen mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{25}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{9}{5}$ für $[-1,84; 1,84]$.

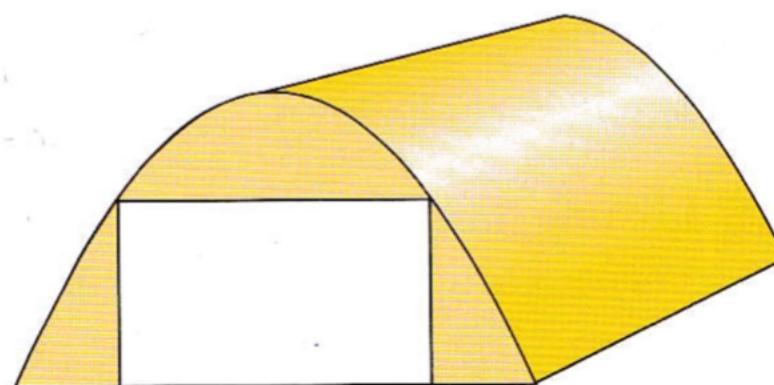
In diese Seitenwand der Halle soll ebenerdig ein Tor mit möglichst großer Fläche eingebaut werden.



- 14 Ein Designer möchte eine neue Sektglasform mit trichterförmigem Querschnitt kreieren. Dabei soll die Seitenlänge s des Kelches mit 12 cm fest vorgegeben sein. Für welche Maße des Sektglases wird sein Volumen maximal? Wie groß ist dann das maximale Volumen?



- 15 Die Seitenwand einer Tennishalle hat die Form einer Parabel mit der Gleichung $f(x) = -\frac{8}{81}x^2 + 8$. In diese Seitenwand der Halle soll aus Werbegründen ebenerdig ein Fenster mit möglichst großer Fläche eingebaut werden.



10

HB: $A = x \cdot g(x)$

NB: $g(x) = -\frac{2}{3}x + 4$

ZF: $A(x) = x \cdot (-\frac{2}{3}x + 4)$
 $A(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$

$$A'(x) = -\frac{4}{3}x + 4$$

$$A''(x) = -\frac{4}{3}$$

notw. Bed.: $A'(x) = 0$

$$0 = -\frac{4}{3}x + 4 \quad | + \frac{4}{3}x$$

$$\frac{4}{3}x = 4 \quad | : \frac{4}{3}$$

$$x = 3$$

hinr. Bed.: $A''(x) \neq 0$

$$A''(3) = -\frac{4}{3} \Rightarrow \text{Max } \textcircled{\smile}$$

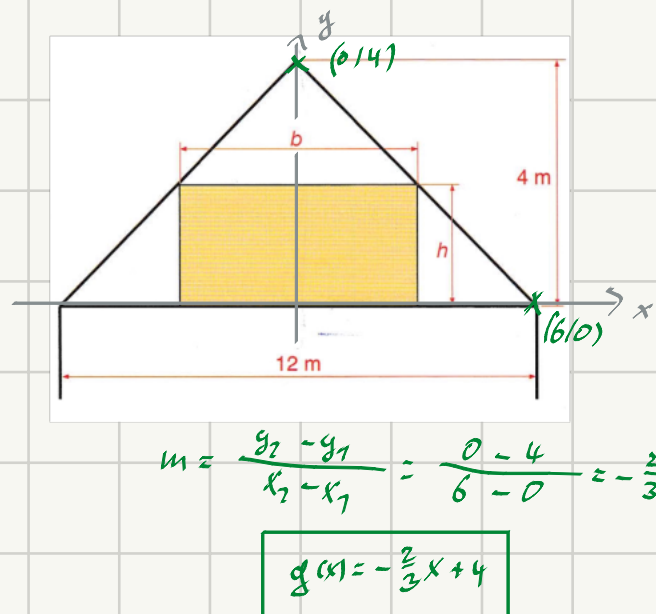
$$x^* = 3$$

Maße:

Breite: $b^* = 2 \cdot x^* = 2 \cdot 3 = 6 \text{ (m)}$

Höhe: $h^* = g(3) = -\frac{2}{3} \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 = 6 \text{ (m)}$

Tiefe: $t = 10 \text{ m}$ (siehe Aufg.)



maximales Volumen: $V^* = b^* \cdot h^* \cdot t = 6 \cdot 6 \cdot 10 = 360 \text{ (m}^3\text{)}$
zugehörige Wohnfläche: $A = b^* \cdot t = 6 \cdot 10 = 60 \text{ (m}^2\text{)}$

ANTWORT: Bei den Maßen 6m x 6m x 10m entsteht ein maximaler Rauminhalt von 360 Kubikmetern.
Die zugehörige Wohnfläche beträgt 60 Quadratmeter.

13 HB: $A = 2x \cdot f(x)$

NB: $f(x) = \frac{1}{25}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{9}{5}$

ZF: $A(x) = 2x \cdot (\frac{1}{25}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{9}{5})$

$$A(x) = \frac{2}{25}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{18}{5}x$$

$$A'(x) = \frac{2}{5}x^4 - 4x^2 + \frac{18}{5}$$

$$A''(x) = \frac{8}{5}x^3 - 8x$$

notw. Bed.: $A'(x) = 0$

aus Zeitgründen
ausnahmsweise
mit dem WTR
bestimmt.

$$0 = \frac{2}{5}x^4 - 4x^2 + \frac{18}{5}$$

$$x = 3 \text{ nicht in } \mathbb{D}$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = -1$$

$$x_4 = -3 \text{ nicht in } \mathbb{D}$$

hinr. Bed.: $A''(x) \neq 0$

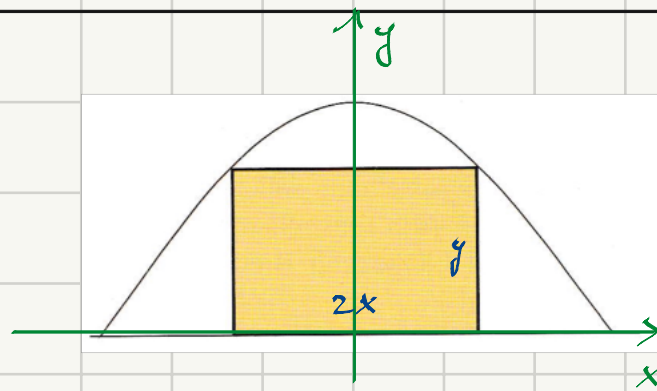
$$A''(1) = \frac{8}{5} \cdot 1^3 - 8 \cdot 1$$

$$A''(1) = -6,4 \Rightarrow \text{Max } \textcircled{\smile}$$

$$A''(-1) = \frac{8}{5} \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1)$$

$$A''(-1) = 6,4 \Rightarrow \text{Min } \textcircled{\smile}$$

$$\Rightarrow x^* = 1$$



Maße des Tors:

Breite: $2 \cdot x^* = 2 \cdot 1 = 2 \text{ LE}$

Höhe: $f(1) = \frac{1}{25} \cdot 1^4 - \frac{2}{3} \cdot 1^2 + \frac{9}{5} = \frac{88}{75} \text{ LE}$

Fläche: $A_{\max} = \frac{88}{75} \cdot 2 = \frac{176}{75} \text{ FE}$

15

$$\text{HB: } A = 2x \cdot f(x)$$

$$\text{NB: } f(x) = -\frac{8}{81}x^2 + 8$$

$$\text{ZF: } A(x) = 2x \cdot \left(-\frac{8}{81}x^2 + 8\right)$$

$$A(x) = -\frac{16}{81}x^3 + 16x$$

$$A'(x) = -\frac{16}{27}x^2 + 16$$

$$A''(x) = -\frac{32}{27}x$$

$$\bullet \text{ notw. Bed.: } A'(x) = 0$$

$$0 = -\frac{16}{27}x^2 + 16 \quad | +\frac{16}{27}x^2$$

$$\frac{16}{27}x^2 = 16 \quad | : \frac{16}{27}$$

$$x^2 = 27 \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 \approx 5,2$$

$$x_2 \approx -5,2$$

$$\bullet \text{ linr. Bed.: } A''(x) \neq 0$$

$$A''(5,2) = -\frac{32}{27} \cdot 5,2$$

$$A''(5,2) \approx -6,2 \Rightarrow \text{Max} (\smile)$$

$$A''(-5,2) = -\frac{32}{27} \cdot (-5,2)$$

$$A''(-5,2) \approx 6,2 \Rightarrow \text{Min} (\frown)$$

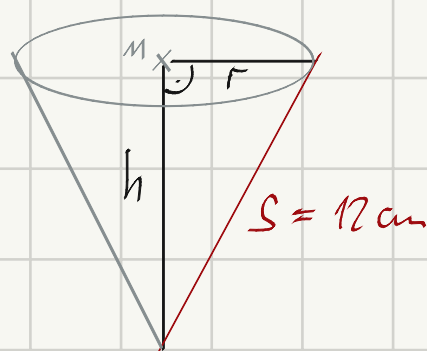
$$x^* = 5,2$$

$$A_{\max}(5,2) = -\frac{16}{81} \cdot 5,2^3 + 16 \cdot 5,2$$

$$\underline{\underline{A_{\max}(5,2) \approx 55,4}}$$

Antwort: Das Fenster kann maximal eine Größe von etwa 55,4 Flächeneinheiten einnehmen.

14



$$\text{HB: } V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

$$\text{NB: } 12^2 = h^2 + r^2$$

$$144 = h^2 + r^2 \quad | -h^2$$

$$144 - h^2 = r^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\sqrt{144 - h^2} = r$$

$$\text{ZF: } V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\sqrt{144 - h^2})^2 \cdot h$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (144 - h^2) \cdot h$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi h \cdot (144 - h^2)$$

$$V(h) = 48 \cdot \pi \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^3$$

$$V'(h) = 48 \cdot \pi - \pi h^2$$

$$V''(h) = -2\pi h$$

$$\text{notw. Bed.: } V'(h) = 0$$

$$0 = 48\pi - \pi h^2 \quad | +\pi h^2$$

$$\pi h^2 = 48\pi \quad | : \pi$$

$$h^2 = 48$$

$$h_1 \approx 6,928$$

$$h_2 \approx -6,928$$

$$\text{linr. Bed.: } V''(h) \neq 0$$

$$V''(6,928) = -2 \cdot \pi \cdot 6,928$$

$$V''(6,928) \approx -43,5 \Rightarrow \text{Max} (\smile)$$

$$V''(-6,928) = -2 \cdot \pi \cdot (-6,928)$$

$$V''(-6,928) \approx 43,5 \Rightarrow \text{Min} (\frown)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{h^* = 6,928 \text{ (cm)}}}$$

$$r^* = \sqrt{144 - (h^*)^2}$$

$$= \sqrt{144 - 6,928^2}$$

$$\approx \underline{\underline{9,798}}$$

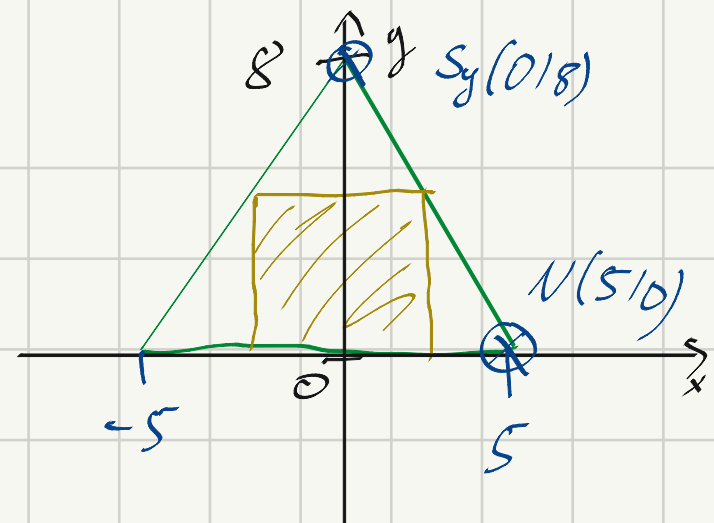
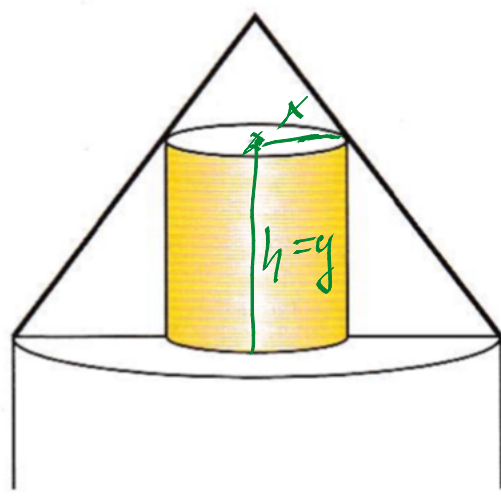
$$V^* = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r^*)^2 \cdot h^*$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9,798^2 \cdot 6,928$$

$$\approx 696,48$$

Antwort: Bei einem Radius von etwa 9,798 cm und einer Höhe des Kelches von ca. 7 cm entsteht ein maximales Volumen von etwas mehr als 695 Kubikzentimetern.

- 8 In die kegelförmige Spitze eines kreisrunden Turms (die Spitze ist 8 m hoch) mit dem Durchmesser 10 m soll ein zylindrischer Wasserbehälter eingebaut werden. Wie sind die Maße dieses Behälters zu wählen, damit er möglichst viel Wasser aufnehmen kann?



Aufstellen der NB (Randfunktion)

$$\begin{array}{l} S_y(0|8) \\ N(5|0) \end{array} \Rightarrow b = 8$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 8}{5 - 0} = \underline{\underline{-1,6}} \Rightarrow \boxed{g(x) = -1,6x + 8}$$

HB: $A = x \cdot g(x)$

NB: $g(x) = -1,6x + 8$

ZF: $A(x) = x \cdot (-1,6x + 8)$
 $A(x) = -1,6x^2 + 8x$

$$\begin{aligned} A'(x) &= -3,2x + 8 \\ A''(x) &= -3,2 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $A'(x) = 0:$

$$\begin{array}{l} 0 = -3,2x + 8 \quad | +3,2x \\ 3,2x = 8 \quad \quad | :3,2 \\ x = 2,5 \end{array}$$

hint. Bed.: $A''(x) \neq 0:$

$$A''(2,5) = -3,2 \Rightarrow \text{Max} \text{ (😊)}$$

$$\boxed{x^* = 2,5} = r^*$$

$$h^* = g(2,5) = -1,6 \cdot 2,5 + 8 = 4$$

Optimale Höhe: $h^* = 4 \text{ (m)}$

Optimale Breite: $b^* = 2 \cdot r^* = 2 \cdot 2,5 = \underline{\underline{5 \text{ (m)}}}$

$$V_{\max}^* = \pi \cdot (r^*)^2 \cdot h^* = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 4 \approx 78,5 \text{ (m}^3\text{)}$$

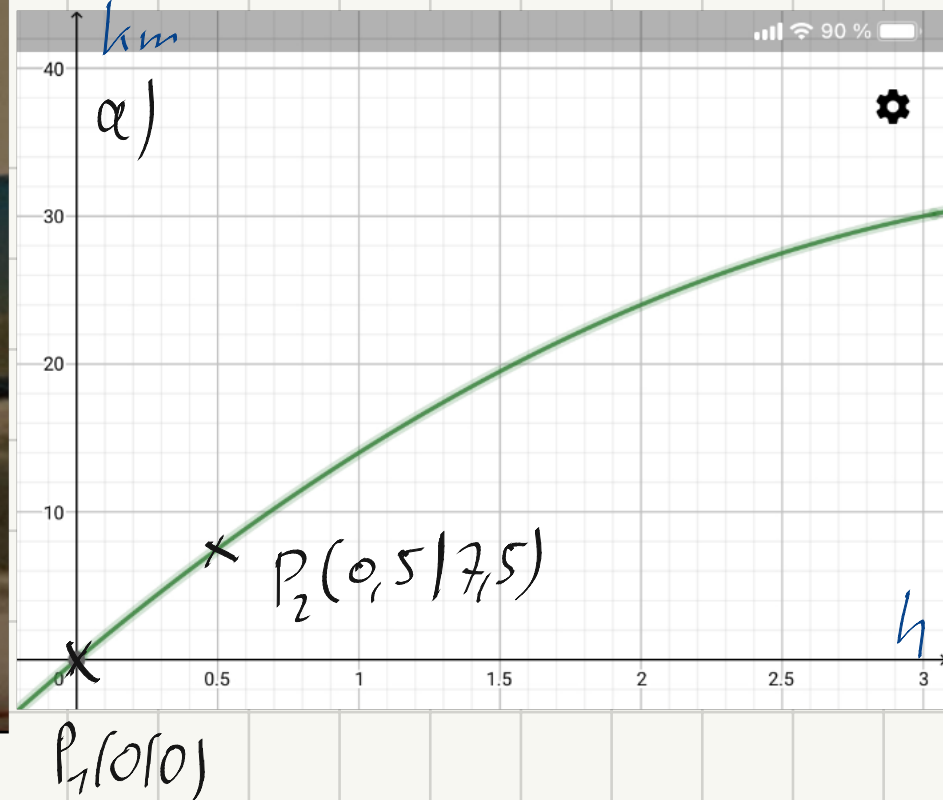
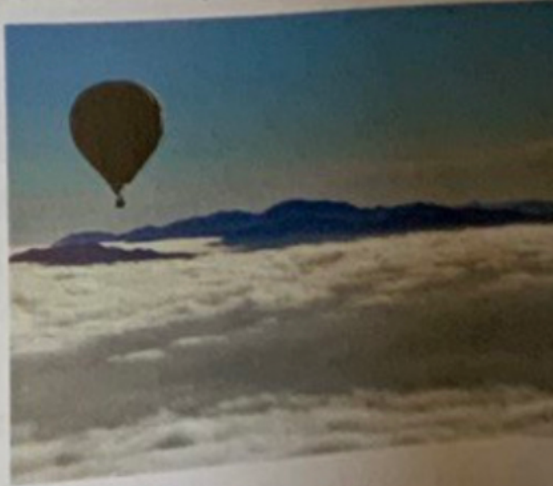
(nicht gefragt)

Die Maße für einen volumenmaximalen Zylinder sind exakt 5 m * 4 m (Breite * Höhe).

16. Wetterballon

Ein Wetterballon funkelt beim Aufsteigen unter anderem seine Positionsdaten. Seine Steighöhe wird durch die Funktion $h(t) = -2t^2 + 16t$ erfasst (t: Std., h: km)

- Zeichnen Sie den Graphen von h für $0 \leq t \leq 3$ und interpretieren Sie ihn.
- Wie groß ist die mittlere Steiggeschwindigkeit des Ballons in den ersten 30 Minuten?
- Wie groß ist momentane Steiggeschwindigkeit beim Start? (Verwenden Sie eine Näherungstab.)
- Wie groß ist die momentane Steiggeschwindigkeit in 24 km Höhe? (Berechnen Sie zunächst die Zeit t für 24 km Aufstieg).



b) bei 30 Min: $t = 0,5$

$$h(0,5) = -2 \cdot 0,5^2 + 16 \cdot 0,5 = 7,5$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7,5 - 0}{0,5 - 0} = 15 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$$

Antwort: ...

c) $h'(t) = -4t + 16$

$$h'(0) = -4 \cdot 0 + 16 = 16 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$$

Antwort: ...

d) $h(x) = -2t^2 + 16t$

$$24 = -2t^2 + 16t \quad | -24$$

$$0 = -2t^2 + 16t - 24 \quad | :(-2)$$

$$0 = t^2 - 8t + 12$$

$$t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12}$$

$$t_{1,2} = 4 \pm 2$$

$$t_1 = 6 \text{ (Teil der Sinkphase - also irrelevant)}$$

$$\underline{t_2 = 2} \text{ (Teil der Steigungsphase)}$$

$$P(2|24)$$

$$h'(2) = -4 \cdot 2 + 16$$

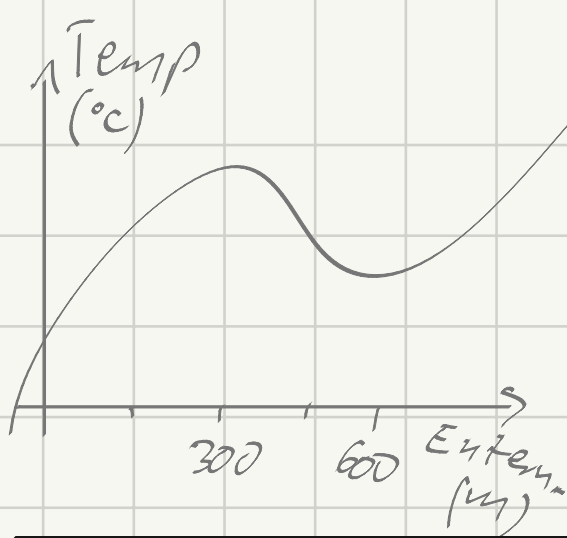
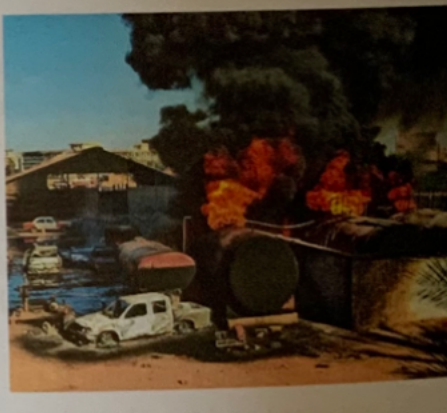
$$h'(2) = -8 + 16 = \underline{\underline{8}}$$

Antwort: ...

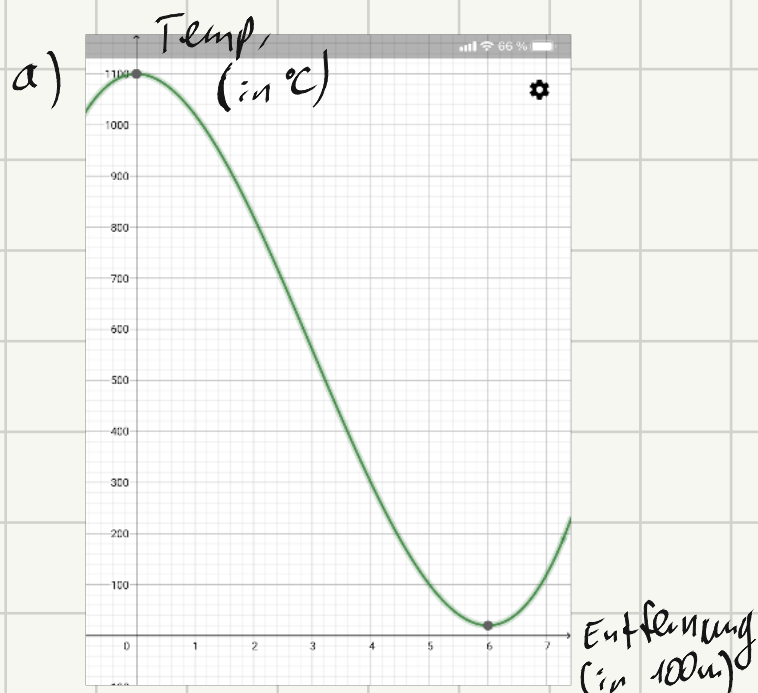
15. Explosion

Bei der Explosion eines Öltanks betrug die Hitze im Zentrum über 1000 °C. Die wegelaufenen Menschen wurden von der Strahlungshitze erfasst und erlitten z.T. schwere Verbrennungen, wenn sie nicht schnell genug Deckung fanden. Die Temperatur kann angenähert erfasst werden durch die Funktion $T(x) = 10x^3 - 90x^2 + 1100$, $0 < x < 6$, wobei x die Entfernung vom Zentrum in 100 m und T die Temperatur in °C ist.

- Zeichnen Sie den Graphen von T .
- Welche Temperatur herrschte in 300 m Entfernung vom Zentrum?
- Wie groß ist die mittlere Temperaturänderung auf den ersten 300 m?
(Angabe in °C/m oder in °C/100 m)
Wie groß ist sie zwischen 400 m und 500 m?
- Wie groß ist die momentane Temperaturänderung 300 m vom Zentrum entfernt? Ermitteln Sie diese zeichnerisch.



Skizze
(erstes Erkunden des Sachverhalts...)



b)

$$T(3) = 10 \cdot 3^3 - 90 \cdot 3^2 + 1100$$

$$T(3) = 560 \text{ (°C)}$$

Antwort: In 300 Metern Entfernung beträgt die Temperatur 560 °C.

$$c) \quad P_1(0 | 1100)$$

$$P_2(300 | 560)$$

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{560 - 1100}{300 - 0} = \frac{-540}{300} = -1,8$$

$$\Rightarrow -1,8 \cdot 100 = -180 \text{ °C/m}$$

Antwort: Im Mittel verringert sich die Temperatur mit jedem Meter Entfernung um 180 °C.

$$T(4) = 10 \cdot 4^3 - 90 \cdot 4^2 + 1100$$

$$T(4) = 300$$

$$T(5) = 10 \cdot 5^3 - 90 \cdot 5^2 + 1100$$

$$T(5) = 100$$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{100 - 300}{5 - 4} = \frac{-200}{1}$$

$$= -200$$

Antwort:

Im Mittel verringert sich die Temperatur mit jedem Meter Entfernung um 180 °C.

$$d) \quad T'(x) = 30x^2 - 180x$$

$$T'(3) = 30 \cdot 3^2 - 180 \cdot 3$$

$$T'(3) = -270$$

Antwort: Die lokale Temperaturveränd. beträgt bei einer Entfernung von 300 m genau -270 °C

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

$$f'(x) = 6x + 5$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot (x+h)^2 + 5 \cdot (x+h) - 2 - (3x^2 + 5x - 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot (x^2 + 2xh + h^2) + 5 \cdot (x+h) - 2 - (3x^2 + 5x - 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 5x + 5h - 2 - 3x^2 - 5x + 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 + 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (6x + 3h + 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h + 5) = 6x + 3 \cdot 0 + 5 = 6x + 5 = f'(x)$$

Themen Klassenarbeit:

- Tangenten und Normalen
- h-Methode
- lokale vs. mittlere Steigung
- Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen
- Extremalprobleme

11 MG5

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	0	5	5	0	0	4	7	1	0	0	0	1

$$f(x) = C \cdot a^x$$

Startwert

Wachstumsfaktor

$$f(x) = 4 \cdot 1,15^x$$

Wochen

$$f(18) = 4 \cdot 1,15^{18} \approx \underline{\underline{49,5 \text{ (m}^2\text{)}}}$$

Aufgabe 2:

Dragan Djuric feiert heute seinen 40. Geburtstag. An diesem Tag denken viele Menschen über ihr Alter und über das Altern als solches nach. Dragan beschließt daher, eine größere Geldsumme als zusätzliche Altersvorsorge zu investieren, damit er beim Eintritt in den Ruhestand in etwa 25 Jahre nach wie vor ein komfortables Leben führen kann.



In diesem Zusammenhang hat er zwei Angebote eingeholt:

Angebot 1:	Startkapital 10.000 €	- linearer Verzins mit 10% Jahreszins
Angebot 2:	Startkapital 10.000 €	- exponentielle Verzinsung mit 5% Jahreszins

- a) Versuche die beiden Angebote als Funktionen darzustellen.
- b) Gibt man beide Funktionen in die Tabellenfunktion des Taschenrechners ein, ergibt sich folgendes Bild (Parameter für WTR-Tabellenfunkt.: Start: 0 End: 35. Inkre: 5):

x	f(x)	g(x)
0	10000	10000
5	15000	12762
10	20000	16288
15	25000	20789
20	30000	26532
25	35000	33863
30	40000	43219
35	45000	55160

f(x): Angebot 1 (linearer Verzinsung)

g(x): Angebot 2 (exponentielle Verzinsung)

Wie sollte sich Dragan deiner Meinung nach entscheiden? Begründe deine Antwort.

- c) Zeichne deine bei a) aufgestellten Funktionen in ein hierfür geeignetes Koordinatensystem.

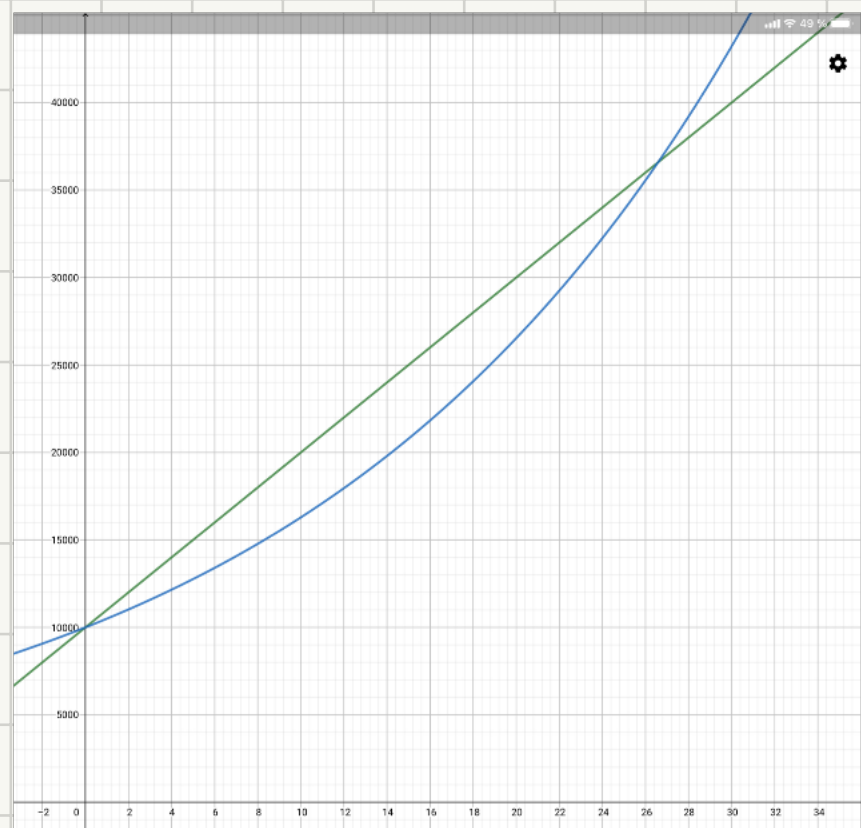
a)

Angebot 1 (linear)

$$f(x) = 1000x + 10.000$$

Angebot 2 (exponentiell)

$$g(x) = 10000 \cdot 1,05^x$$



2. Punktprobe

Liegen die Punkte P und Q auf f?

- a) $f(x) = 9 \cdot 1,5^x$, $P(-2|4)$, $Q(2|20)$
 b) $f(x) = 4 \cdot 0,5^x$, $P(3|0,25)$, $Q(-2|16)$
 c) $f(x) = \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $P(3|\frac{1}{8})$, $Q(-2|20,25)$
 d) $f(x) = 1,6 \cdot 0,8^x$, $P(2|2,5)$, $Q(-3|\frac{25}{8})$

3. Umkehrwerte

Bestimmen Sie die Stelle x, an welcher die Funktion f den Wert y annimmt.

- a) $f(x) = 2 \cdot 4^x$, $y = 4$
 b) $f(x) = 0,2 \cdot 5^x$, $y = 25$
 c) $f(x) = 2 \cdot 1,5^x$, $y = 4,5$

4. Schnittpunkte

Wo schneiden sich f und g?

- a) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$, $g(x) = \frac{1}{27} \cdot 9^x$
 b) $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$
 c) $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$, $g(x) = 6 \cdot 3^x$

5. Rekonstruktionen

Die Funktion $f(x) = c \cdot a^x$ geht durch die Punkte P und Q. Bestimmen Sie a und c.

- a) $P(-1|4)$, $Q(0|0,25)$
 b) $P(-1|6)$, $Q(1|24)$
 c) $P(-2|16)$, $Q(2|1)$

6. Bakterienwachstum

Zwei Bakterienpopulationen I und II bestehen zu Beobachtungsbeginn aus 200 bzw. aus 400 Bakterien. Population I vermehrt sich um 16% am Tag, Population II nur um 12%.

- a) Wie groß sind die Bestände nach 10 Tagen?
 b) Wann haben die Bestände die Größe 1000 erreicht?
 c) Wann sind die Bestände gleich stark?

7. Rekonstruktion

Prüfen Sie mit dem Quotiententest, ob die Tabellen exponentielle Prozesse wiedergeben. Wie lautet die jeweilige Funktionsgleichung?

Wann wird der Wert 1000 erreicht?

Tabelle 1:

x	0	1	2	3	4
f(x)	100	120	144	173	207

Tabelle 2:

x	0	1	2	3	4
f(x)	50	90	162	291	525

Tabelle 3:

x	0	2	4	6	8
f(x)	100	196	384	753	1476

8. Ein Abnahmeprozess

20000 Eisbären leben rund um den Nordpol. Sie sind zu Symbolen für die Gefahren des Klimawandels geworden. Es wurde festgestellt, dass die Population kleiner wird und um 1% jährlich schrumpft. Wir nehmen einmal an, dass die Population sich nach der folgenden Formel entwickelt:

 $N(t) = c \cdot a^t$ (t in Jahren).

- a) Wie lautet die Gleichung von N?
 b) Um welche Zahl nimmt die Population in den ersten beiden Jahren ab?
 c) Wann beträgt die Zahl der Bären nur noch 15000?



② Punktprobe:

$$4 = 9 \cdot 1,5^{-2}$$

$$4 = 4 \quad \checkmark$$

 $\Rightarrow$ P liegt auf der Kurve von f.

$$20 = 9 \cdot 1,5^{-2}$$

$$20 = 20,25 \quad \checkmark$$

 $\Rightarrow$ Q liegt nicht auf der Kurve von f.

③

$$a) \quad 4 = 2 \cdot 4^x \quad | :2$$

$$2 = 4^x \quad | \ln$$

$$\ln(2) = \ln(4^x)$$

$$\ln(2) = x \cdot \ln(4) \quad | : \ln(4)$$

$$\frac{\ln(2)}{\ln(4)} = x$$

$$\frac{1}{2} = x$$

$$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$$

④

$$a) \quad \frac{1}{3} \cdot 3^x = \frac{1}{27} \cdot 9^x \quad | : \frac{1}{27} \quad \frac{1}{3} = \frac{27}{1}$$

$$9 \cdot 3^x = 9^x \quad | : 3^x$$

$$9 = \frac{9^x}{3^x}$$

$$9 = \left(\frac{9}{3}\right)^x$$

$$9 = 3^x \quad | \ln$$

$$\ln(9) = \ln(3^x)$$

$$\ln(9) = x \cdot \ln(3)$$

$$\frac{\ln(9)}{\ln(3)} = x$$

$$2 = x$$

y-Wert:

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 3^2$$

$$f(2) = 3$$

$$S(2|3)$$

$$c) \quad \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = 6 \cdot 3^x$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x} = 6 \cdot 3^x \quad | \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\frac{3}{2} = 6 \cdot 3^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad | :6$$

$$0,25 = 3^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$0,25 = \left(3 \cdot \frac{2}{3}\right)^x$$

$$0,25 = 2^x \quad | \ln$$

$$\ln(0,25) = \ln(2^x)$$

$$\ln(0,25) = x \cdot \ln(2) \quad | : \ln(2)$$

$$\frac{\ln(0,25)}{\ln(2)} = x$$

$$-2 = x$$

$$g(-2) = 6 \cdot 3^{-2}$$

$$g(-2) = \frac{2}{3}$$

$$S(-2|\frac{2}{3})$$

7. Rekonstruktion
 Prüfen Sie mit dem Quotiententest, ob die Tabellen exponentielle Prozesse wiedergeben. Wie lautet die jeweilige Funktionsgleichung?
 Wann wird der Wert 1000 erreicht?

Tabelle 1:

x	0	1	2	3	4
f(x)	100	120	144	173	207

Tabelle 2:

x	0	1	2	3	4
f(x)	50	90	162	291	525

Tabelle 3:

x	0	2	4	6	8
f(x)	100	196	384	753	1476

für Tabelle 1

$$a_1 = \frac{120}{100} = 1,2$$

$$a_2 = \frac{144}{120} = 1,2$$

$$a_3 = \frac{173}{144} \approx 1,2014$$

$$a_4 = \frac{207}{173} \approx 1,197$$

$$a = 1,2$$

$$C = 100$$

$$f(x) = 100 \cdot 1,2^x$$

da hier $x=0$

$$a = \sqrt[n]{\frac{\text{Nachfolger}}{\text{Vorgänger}}}$$

Springweite

Tabelle 3:

$$a_1 = \sqrt[2]{\frac{196}{100}} = 1,4$$

$$a_2 = \sqrt[2]{\frac{384}{196}} \approx 1,3997$$

$$a_3 = \sqrt[2]{\frac{753}{384}} \approx 1,4003$$

$$a_4 = \sqrt[2]{\frac{1476}{753}} \approx 1,4006$$

$$a = 1,4$$

$$C = 100$$

da hier $x=0$

$$f(x) = 100 \cdot 1,4^x$$

5) a)

$$P_1(-1/4)$$

$$P_2(0/0,25)$$

x	-1	0
f(x)	4	0,25

$$a = \frac{\text{Nachfolger}}{\text{Vorgänger}} = \frac{0,25}{4} = 0,0625$$

$$C = 0,25$$

da hier $x=0$

$$f(x) = 0,25 \cdot 0,0625^x$$

b) $P_1(-1/6)$

$P_2(1/24)$

x	-1	1
f(x)	6	24

$$a = \sqrt[2]{\frac{24}{6}} = 2$$

$$f(x) = C \cdot a^x$$

$$24 = C \cdot 2^1$$

$$24 = 2 \cdot C \quad | :2$$

$$12 = C$$

$$f(x) = 12 \cdot 2^x$$

c) $P_1(-2/16)$
 $P_2(2/1)$

x	-2	2
f(x)	16	1

$$a = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = C \cdot a^x$$

Da bei dieser Aufgabe kein Punkt mit $x=0$ gegen wird, muss C berechnet werden:

$$1 = C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$1 = 0,25 \cdot C \quad | :0,25$$

$$4 = C$$

$$f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

6. Bakterienwachstum

$C = 200$ $C = 400$

Zwei Bakterienpopulationen I und II bestehen zu Beobachtungsbeginn aus 200 bzw. aus 400 Bakterien. Population I vermehrt sich um 16% am Tag, Population II nur um 12%.

- Wie groß sind die Bestände nach 10 Tagen?
- Wann haben die Bestände die Größe 1000 erreicht?
- Wann sind die Bestände gleich stark?

$$f_I(x) = 200 \cdot 1,16^x$$

$$f_{II}(x) = 400 \cdot 1,12^x$$

$$a) f_I(10) = 200 \cdot 1,16^{10} \approx 882,29$$

$$f_{II}(10) = 400 \cdot 1,12^{10} \approx 1242,34$$

$$b) \text{ I: } 1000 = 200 \cdot 1,16^x$$

$$5 = 1,16^x \quad | \ln$$

$$\ln(5) = x \cdot \ln(1,16) \quad | : \ln(1,16)$$

$$\frac{\ln(5)}{\ln(1,16)} = x$$

$$10,84 \approx x$$

Antwort:

$$\text{II: } 1000 = 400 \cdot 1,12^x$$

$$2,5 = 1,12^x \quad | \ln$$

$$\ln(2,5) = x \cdot \ln(1,12) \quad | : \ln(1,12)$$

$$\frac{\ln(2,5)}{\ln(1,12)} = x$$

$$8,09 \approx x$$

c) Schnittpunkt?

→ gleichsetzen:

$$200 \cdot 1,16^x = 400 \cdot 1,12^x \quad | : 200$$

$$1,16^x = 2 \cdot 1,12^x \quad | : 1,12^x$$

$$\frac{1,16^x}{1,12^x} = 2$$

$$\left(\frac{1,16}{1,12}\right)^x = 2 \quad | \ln$$

$$x \cdot \ln\left(\frac{1,16}{1,12}\right) = \ln(2) \quad | : \ln\left(\frac{1,16}{1,12}\right)$$

$$x = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{1,16}{1,12}\right)}$$

$$x \approx 19,75$$

Antwort: Nach etwa 20 Tagen sind die Bakterienpopulationen gleich stark.

8. Ein Abnahmeprozess

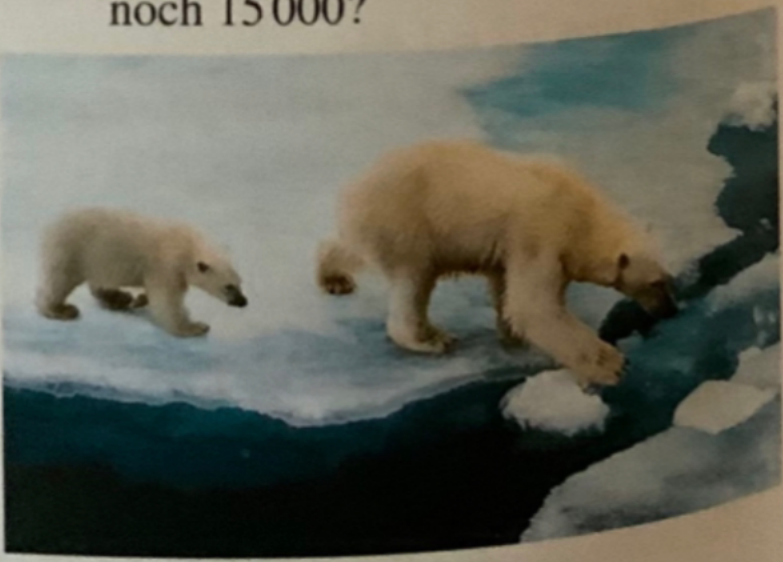
20000 Eisbären leben rund um den Nordpol. Sie sind zu Symbolen für die Gefahren des Klimawandels geworden. Es wurde festgestellt, dass die Population kleiner wird und um 1% jährlich schrumpft. Wir nehmen einmal an, dass die Population sich nach der folgenden Formel entwickelt:

$$N(t) = c \cdot a^t \quad (t \text{ in Jahren}).$$

a) Wie lautet die Gleichung von N ?

b) Um welche Zahl nimmt die Population in den ersten beiden Jahren ab?

c) Wann beträgt die Zahl der Bären nur noch 15000?



⑧

$$a) N(t) = 20000 \cdot 0,99^t$$

$$b) N(2) = 20000 \cdot 0,99^2$$
$$N(2) = 19602$$

$$\begin{array}{r} 20000 \\ - 19602 \\ \hline = 398 \end{array}$$

Antwort: In den ersten beiden Jahren schrumpft die Population um fast 400 Eisbären.

$$c) 15000 = 20000 \cdot 0,99^x \quad | : 20000$$

$$0,75 = 0,99^x \quad | \ln$$

$$\ln 0,75 = x \cdot \ln(0,99) \quad | : \ln(0,99)$$

$$\frac{\ln(0,75)}{\ln(0,99)} = x$$

$$\underline{\underline{28,6 \approx x}}$$

Antwort: Nach etwas mehr als $28\frac{1}{2}$ Jahren sinkt die Population unter 15.000 Tiere.

S. 213:

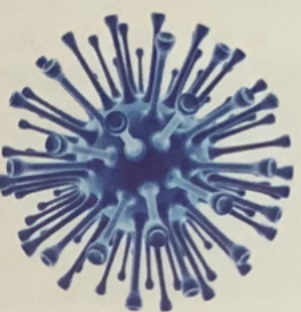
7. Influenza

Die gefürchtete *Influenza* unterscheidet sich vom relativ harmlosen grippalen Infekt durch schlagartigen Beginn mit 40°C Fieber und schwerem Krankheitsgefühl. Der Influenzaerreger kann sich nämlich in den Atemwegen aufgrund einer raffinierten Strategie explosionsartig verbreiten. Innerhalb von 6 Stunden entwickeln sich aus einem Virus 1500 neue Viren.

a) Wie lautet das Wachstumsgesetz, wenn die Infektion durch 100 Erreger verursacht wird?

b) Wann übersteigt die Anzahl der Erreger die Millionen- bzw. die Milliardengrenze?

c) Wie groß ist die Verdopplungszeit des Prozesses?



⑦ a)

t	0	6
f(t)	1	1500

$$a = \sqrt[6]{\frac{1500}{1}} \approx 3,383$$

$$c = 100$$

$$f(t) = 100 \cdot 3,383^t$$

b)

$$1.000.000 = 100 \cdot 3,383^t$$

$$10.000 = 3,383^t \quad | \ln$$

$$\ln(10.000) = t \cdot \ln(3,383)$$

$$\frac{\ln(10.000)}{\ln(3,383)} = t$$

$$7,56 \approx t$$

$$1000.000.000 = 100 \cdot 3,383^t$$

$$10.000.000 = 3,383^t \quad | \ln$$

$$\ln(10.000.000) = t \cdot \ln(3,383) \quad | : \ln(3,383)$$

$$\frac{\ln(10.000.000)}{\ln(3,383)} = t$$

$$13,22 \approx t$$

Antwort: Nach etwa 7,5 Stunden existieren 1 Mio. Viren - nach etwa 13,2 Stunden existieren bereits 1 Mrd. Viren.

nur bei exponentiellem Wachstum

nur bei exponentiellem Zerfall

c)

$$200 = 100 \cdot 3,383^t \quad | : 100$$

$$2 = 3,383^t \quad | \ln$$

$$\ln(2) = t \cdot \ln(3,383) \quad | : \ln(3,383)$$

$$\frac{\ln(2)}{\ln(3,383)} = t$$

$$0,569 \approx t$$

oder mit der Formel

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

siehe S. 208

Halbwertszeit

$$T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$$

siehe S. 207

Antwort: Die Verdopplungszeit beträgt etwas mehr als eine halbe Stunde.

8. Luftdruck

Der Luftdruck nimmt mit steigender Höhe über dem Meeresspiegel exponentiell um etwa 12% pro Kilometer ab. In Meereshöhe herrscht ein Luftdruck von ca. 1013 hPa.

a) Geben Sie eine Funktion an, die die Druckabnahme modelliert. Zeichnen Sie den Graphen.

b) Berechnen Sie den Luftdruck auf der Zugspitze (3000 m) und dem Mount Everest (8900 m).

c) Wie viele Meter muss man steigen, bis sich der Luftdruck halbiert hat?

d) Der Mensch kann einen Luftdruck bis hinunter zu 400 mbar aushalten. Bis zu welcher Höhe kann ein Mensch ohne Atemmaske aufsteigen?



a)

$$a = 0,88$$

$$c = 1013$$

$$f(x) = 1013 \cdot 0,88^x$$

b)

Zugspitze: $x = 3$ $f(3) = 1013 \cdot 0,88^3 \approx 690,3 \text{ (hPa)}$

Everest: $x = 8,9$ $f(8,9) = 1013 \cdot 0,88^{8,9} \approx 324,7 \text{ (hPa)}$

Antwort: ---

c)

$$T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(0,88)} \approx 5,42 \stackrel{!}{=} 5420 \text{ Höhenmeter}$$

Antwort: Erst bei einer Höhe von etwa 5.400 m hat sich der Luftdruck, der an der Küste herrscht, halbiert.

d)

$$1 \text{ mbar} \stackrel{!}{=} 1 \text{ hPa}$$

$$400 = 1013 \cdot 0,88^x \quad | : 1013$$

$$\frac{400}{1013} = 0,88^x \quad | \ln$$

$$\frac{\ln(\frac{400}{1013})}{\ln(0,88)} = x$$

$$x \approx 7,27 \stackrel{!}{=} 7.270 \text{ Höhenmeter}$$

Antwort: Ab einer Höhe von etwa 7.200 Metern wird es für den Menschen lebensgefährlich, was den Luftdruck anbetrifft.

9. Alkoholgehalt

Ein Autofahrer fährt in den Graben. Er entfernt sich von der Unfallstelle. Fünf Stunden später wird eine Blutprobe genommen. Der Alkoholgehalt beträgt 0,7 Promille. Eine weitere Stunde später ist er auf 0,6 Promille gefallen. Wie viele Promille hatte der Mann zur Unfallzeit, wenn man exponentielle Abnahme unterstellt? Wie viele Promille wären es bei linearer Abnahme?



Stunden (h)	5	6
Alkoholspiegel (s)	0,7	0,6

exponentiell:

$$\alpha = \frac{\text{Nachfolger}}{\text{Vorgänger}} = \frac{0,6}{0,7} \approx 0,857$$

C:

$$s(h) = C \cdot \alpha^h$$

$$s(h) = C \cdot 0,857^h$$

$$0,7 = C \cdot 0,857^5$$

$$0,7 \approx 0,4623 \cdot C \quad | : 0,4623$$

$$\underline{\underline{1,51 \approx C}}$$

linear:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0,6 - 0,7}{6 - 5}$$

$$= \frac{-0,1}{1} = \underline{\underline{-0,1}}$$

$$g(x) = m \cdot x + b$$

$$0,7 = -0,1 \cdot 5 + b$$

$$0,7 = -0,5 + b \quad | +0,5$$

$$\underline{\underline{1,2 = b}}$$

Antwort: Geht man von einem exponentiellen Modell aus, hatte der Fahrer zum Unfallzeitpunkt einen Alkoholspiegel von etwa 1,5 Promille, während sich bei einem linearen Modell ein Wert von nur 1,2 Promille ergibt.

10. Helligkeit unter Wasser

Die Helligkeit nimmt mit zunehmender Wassertiefe dramatisch ab, nämlich exponentiell. In 16 Metern Tiefe sind nur noch 15% der Lichtmenge übrig.

- a) Geben Sie eine Funktion an, welche den Prozentsatz der Lichtes in Abhängigkeit von der Tauchtiefe beschreibt (Oberfläche: 100%).
b) In welcher Tiefe ist ein Taucher, dessen Belichtungsmesser nur 0,1% des Tageslichtes misst?



x	Tiefe (m)	0	16
f(x)	Lichtmenge (%)	100	15

$$\alpha = \sqrt[16]{\frac{15}{100}} \approx 0,888$$

Lichtstärke (%) →

$$\underline{\underline{f(x) = 100 \cdot 0,888^x}}$$

← Tauchtiefe (m)

$$\begin{array}{l} b) \quad 0,1 = 100 \cdot 0,888^x \quad | : 100 \\ \quad 0,001 = 0,888^x \quad | \ln \end{array}$$

$$\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,888)} \approx 58,15 \text{ (m)}$$

Antwort: In einer Tauchtiefe von etwa 58 Metern herrscht nur noch eine Restlichtstärke von 0,1%.

11. Koffein im Eistee
 Eistee kann Koffeingehalte von bis zu 50 mg pro Glas besitzen. Bei einem Jugendlichen setzt die Wirkung nach einer Stunde ein. Sie nimmt dann mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden ab.

a) Wie lautet die Gleichung der Abnahmefunktion K? Skizzieren Sie den Graphen.
 b) Die anregende Wirkung bleibt erhalten, solange noch 10 mg Koffein im Körper sind. Wie lange ist das der Fall?
 c) Wie lange dauert der anregende Effekt, wenn die Person nach 4 Stunden ein weiteres Glas Eistee zu sich nimmt?

CN1C=NC2=C1C(=O)N(C)C(=O)N2C



a)

$$T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$$

$$3 = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} \quad | \cdot \ln(a)$$

$$3 \cdot \ln(a) = \ln(\frac{1}{2}) \quad | : 3$$

$$\ln(a) = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{3} \quad | e^{\square}$$

$$e^{\ln(a)} = e^{\frac{\ln(\frac{1}{2})}{3}}$$

$$a = 0,79$$

$C = 50$ Stunden

$\Rightarrow K(h) = 50 \cdot 0,79^h$
mg

b)

$$10 = 50 \cdot 0,79^h \quad | : 50$$

$$0,2 = 0,79^h \quad | \ln$$

$$\ln(0,2) = h \cdot \ln(0,79) \quad | : \ln(0,79)$$

$$\frac{\ln(0,2)}{\ln(0,79)} \approx 6,83$$

Antwort: Nach annähernd 7 Stunden ist die Wirkung nicht mehr spürbar.

c) • Konzentration nach 4 Stunden: $K(4) = 50 \cdot 0,79^4 \approx 19,48$

neuer C-Wert

• 2. Glas: $19,48 + 50 = 69,48$

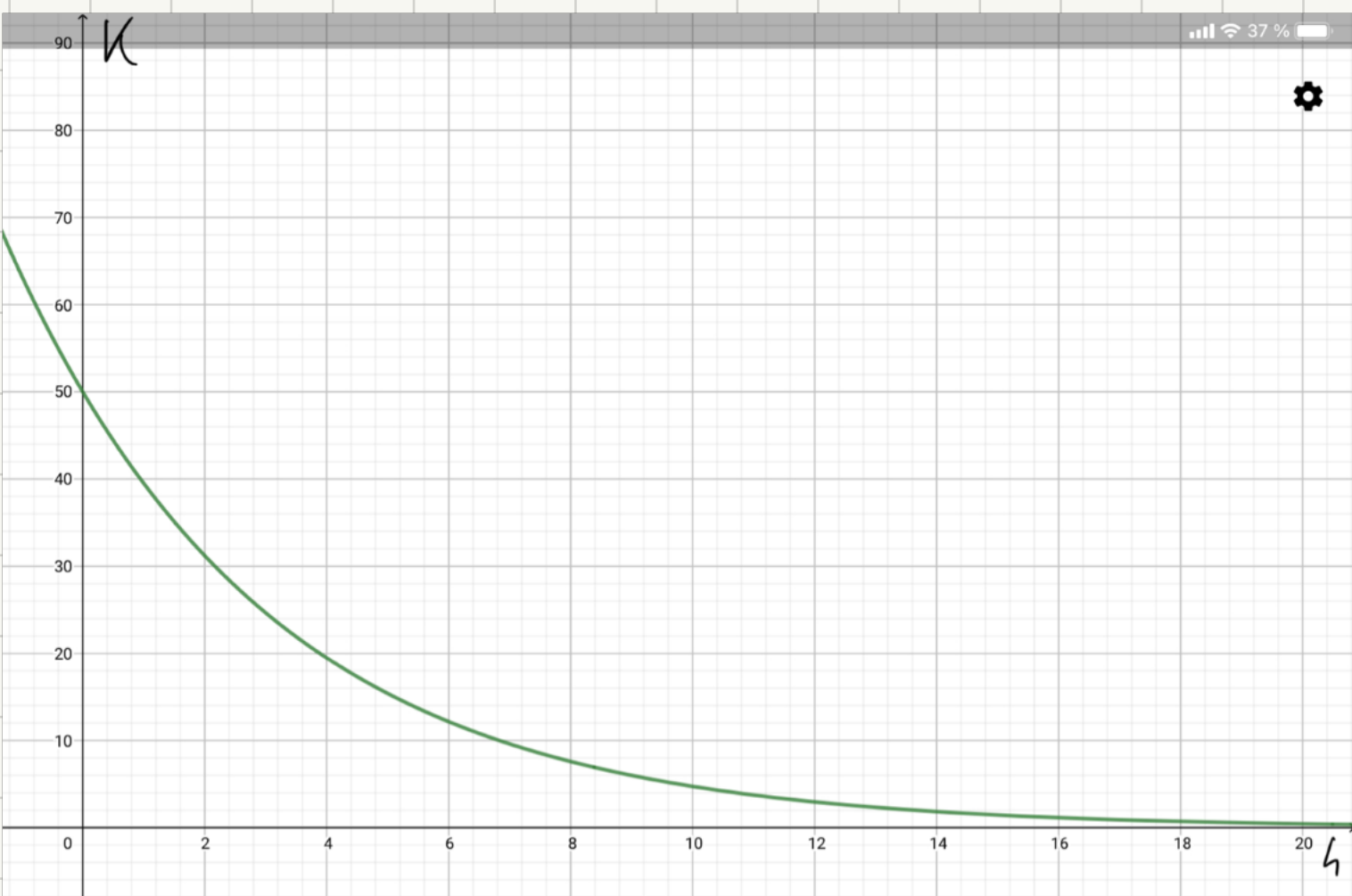
Wirksamkeitsgrenze $\rightarrow 10 = 69,48 \cdot 0,79^h \quad | : 69,48$

$$\frac{250}{1737} = 0,79^h \quad | \ln$$

$$\ln(\frac{250}{1737}) = h \cdot \ln(0,79) \quad | : \ln(0,79)$$

$$\frac{\ln(\frac{250}{1737})}{\ln(0,79)} = h$$

$$h \approx 8,22 \approx 8,5$$



Zeit total:

Phase 1 : 4 Stunden

+ Phase 2 : 8,5 Stunden

12,5 Stunden

- Zeitverzögerung: -1 Stunde

11,5 Stunden

12. Taschengeld

Peter bekommt 10€ Taschengeld im Monat. Seine Eltern sehen ein, dass dieser Betrag für einen Jungen seines Alters nicht ausreicht. Seine Eltern erklären sich damit einverstanden, im kommenden Jahr das Taschengeld jeden Monat um 1,50€ zu erhöhen. Peter schlägt vor, sein Taschengeld jeden Monat um 10% zu erhöhen.

- Erfassen Sie für beide Varianten die Taschengeldzahlungen des Jahres tabellarisch.
- Wie viel Taschengeld steht Peter bei beiden Varianten im gesamten Jahr zur Verfügung?
- Angenommen, die Vereinbarung soll nicht nur für ein Jahr gelten, sondern bis zur Volljährigkeit von Peter in 2,5 Jahren. Wie viel Taschengeld würde er in beiden Varianten im letzten Monat vor der Volljährigkeit erhalten?



a) $g(x) = 1,5x + 10$
 $f(x) = 10 \cdot 1,1^x$

Monat	$g(x)$	$f(x)$
0	10	10
1	11,5	11
2	13	12,1
3	14,5	13,31
4	16	14,64
5	17,5	16,11
6	19	17,72
7	20,5	19,49
8	22	21,44
9	23,5	23,58
10	25	25,94
11	26,5	28,53
12	28	31,39

b) $\Sigma: 237 \quad 235,25$

c) Wie viele Monate bis zum "letzten Monat vor der Volljährigkeit":

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ 6 \\ \hline 30 \\ -1 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$g(29) = 1,5 \cdot 29 + 10 = 53,5 \text{ €}$$

$$f(29) = 10 \cdot 1,1^{29} = 158,63 \text{ €}$$

Antwort: ...

13. Immobilien

Ein 45-jähriger Anleger will 300.000 Euro zur Alterssicherung in einem Haus anlegen. Zwei Angebote kommen in die nähere Auswahl: Ein großes Haus in mittlere Lage, dessen Wert jährlich um 20.000 Euro steigt, sowie ein kleineres Haus in guter Lage, dessen Wert jährlich um 4% zunimmt. f und g seien die Funktionen, die den Wert der Häuser zur Zeit t beschreiben.

- Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von f und g . Skizzieren Sie die Graphen von f und g für $0 \leq t \leq 30$ in einem Koordinatensystem.
- Wie sieht die Bilanz aus, wenn der Anleger mit 65 Jahren in den Ruhestand tritt?
- Wann sind die Häuser etwa gleich viel wert?
- Welchen jährlichen Wertzuwachs müsste das große Haus haben, wenn die Bilanz 30 Jahre lang günstiger sein soll als für das kleine Haus?



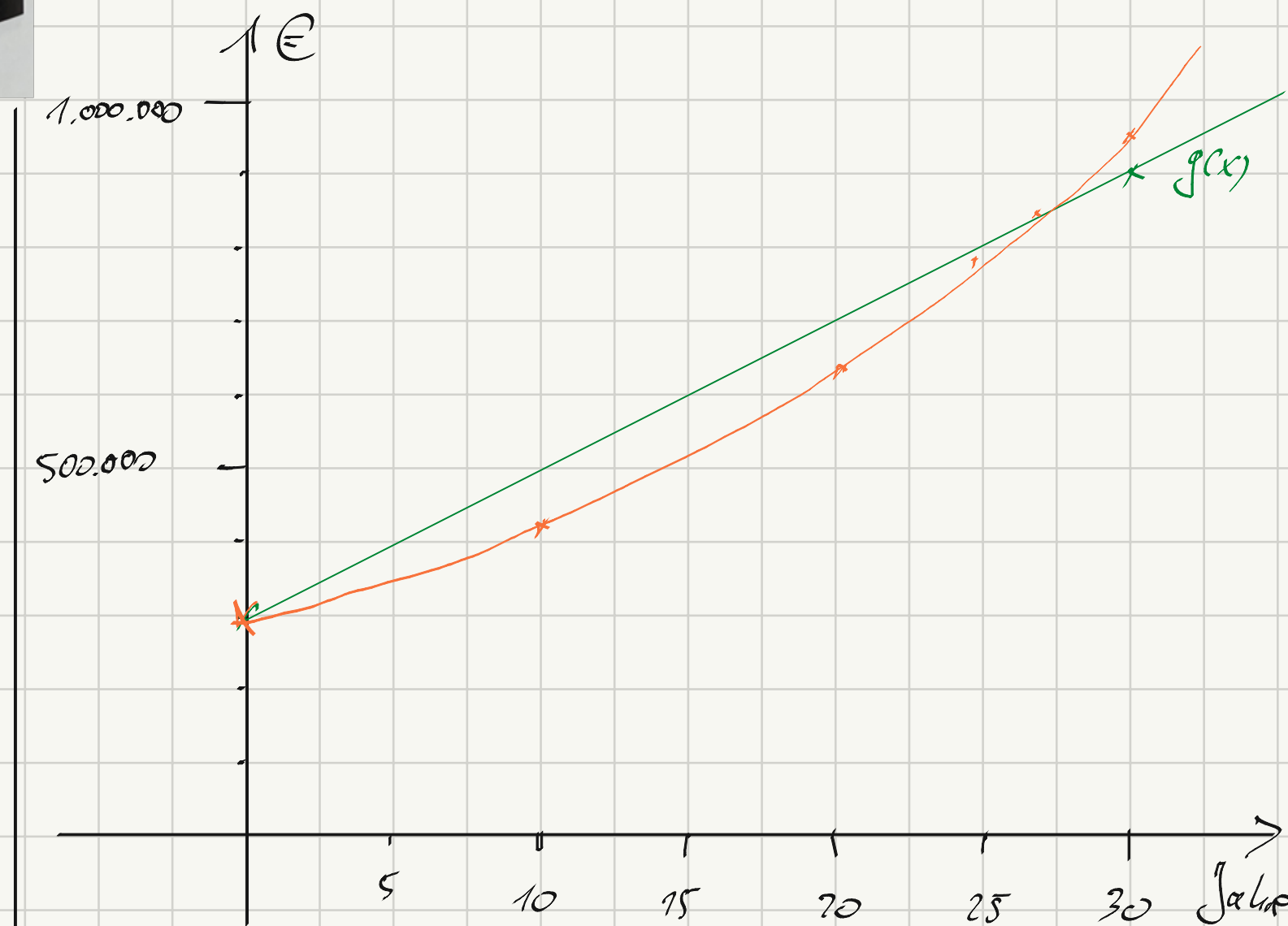
a) linear: groß: + 20.000 € jährlich
 exponentiell: klein: + 4% jährlich } Investitionsvolumen 300.000 €

linear: $g(x) = 20.000 \cdot x + 300.000$
 exponentiell: $f(x) = 300.000 \cdot 1,04^x$

b) $g(20) = 20.000 \cdot 20 + 300.000$
 $g(20) = 700.000$ (linear)
 $f(20) = 300.000 \cdot 1,04^{20}$
 $f(20) \approx 657.336,94$ (exp.)

Antwort: Zum Eintritt des Ruhestands ist das lineare Modell etwas vorteilhafter (+42.500 Euro).

- c) Da die eine Funktion linear und die andere Funktion exponentiell ist, kann die Lösung nicht durch Gleichsetzen und anschließendes Auflösen berechnet werden.
 → zeichnerische Lösung oder Wertetabelle!



⇒ Laut Zeichnung (bzw. Wertetabelle) sind die beiden Häuser nach etwa 25 Jahren gleich viel wert.

$$d) f(30) = 300.000 \cdot 1,04^{30}$$

$$\underline{f(30) \approx 973.019,25} \Rightarrow P(30 | 973.019,25)$$

$$f(x) = m \cdot x + 300.000$$

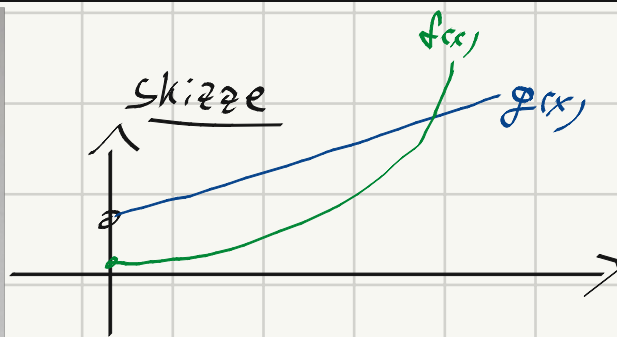
$$973.019,25 = m \cdot 30 + 300.000 \quad | - 300.000$$

$$673.019,25 = 30 \cdot m \quad | : 30$$

$$22.433,98 \approx m$$

Antwort: Bei einer jährlichen Zuwachsrate von genau 22.433,98 € sind beide Häuser nach genau 30 Jahren gleich viel wert.

14. Lineares und exponentielles Wachstum
Eine mit Wasser gefüllte 1200 m² große Kiesgrube wird durch Ausbaggern jede Woche um 200 m² größer. Im folgenden Jahr soll sie als Badesee benutzt werden. Leider hat sich eine aggressive Algenart in der Grube angesiedelt. Die Algen bedecken zu Beginn 10 m², leider verdoppelt sich die von den Algen bedeckte Fläche jede Woche.



a) Fläche See: $g(x) = 200 \cdot x + 1200$

$$g(5) = 200 \cdot 5 + 1200$$

$$\underline{g(5) = 2200}$$

$$g(10) = 200 \cdot 10 + 1200$$

$$\underline{g(10) = 3200}$$

Antwort: ...

b) Fläche Algen: $f(x) = 10 \cdot 2^x$

$$f(5) = 10 \cdot 2^5$$

$$f(5) = 320$$

$$f(10) = 10 \cdot 2^{10}$$

$$f(10) = 10.240$$

Antwort: ...

b) $\frac{1}{2} \cdot g(x) = f(x)$

(Teil) $\frac{1}{2} \cdot (200x + 1200) = 10 \cdot 2^x$

$$\underline{100x + 600 = 10 \cdot 2^x}$$

$f(x)$ in Wertetabelle $g(x)$ in Wertetabelle

Planung Wertetabelle

Start	5
End	10
Step	0,5

Wertetabelle:

M	x	f(x)	g(x)
3	6	1200	640
4	6,5	1250	905,09
5	7	1300	1280
6	7,5	1350	1810,1

7,5

Antwort: Nach etwas mehr als 7 Wochen ist die Kiesgrube zur Hälfte mit Algen bedeckt.

c)

$$g(x) = f(x)$$

$$200x + 120 = 10 \cdot 2^x$$

$f(x)$ in Wertetabelle $g(x)$ in Wertetabelle

Planung Wertetabelle

Start	5
End	10
Int	0,5

Wertetabelle:

CLASSWIZ				
	%	f(x)	g(x)	
4	6,5	1420	905,09	
5	7	1520	1280	
6	7,5	1620	1810,1	
7	8	1720	2560	7

Antwort: Es dauert nicht einmal bis zur 8. Woche, bis der komplette See mit Algen bedeckt ist.

15. Schlafkur

Ein Kranker soll sich einer Schlafkur unterziehen. Zu Beginn erhält er zwei Tabletten, die zu einer Plasmakonzentration von 10 µg/ml führen. Nach zwei Stunden ist die Konzentration auf 8,5 µg/ml gesunken. Ist die Konzentration auf 5 µg/ml gesunken, so muss eine weitere Tablette genommen werden, um die Konzentration wieder auf den Ausgangswert zu erhöhen.



- a) Wie lautet die Gleichung der Funktion, welche die Plasmakonzentration im ersten Einnahmeintervall beschreibt?
 b) Welche Halbwertszeit hat das Medikament?
 c) Der Patient vergisst nach der Erstdosis die Einnahme der Tablette. Wie tief sinkt die Plasmakonzentration bis zur folgenden Einnahme?

$$a) \begin{array}{c|cc} t & 0 & 2 \\ \hline f(t) & 10 & 8,5 \end{array}$$

$$a = \sqrt{\frac{8,5}{10}} \approx \underline{\underline{0,922}}$$

$$c = 10$$

$$\underline{\underline{f(t) = 10 \cdot 0,922^t}}$$

$$b) T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(0,922)} \approx \underline{\underline{8,54}}$$

Antwort: Alle 8,5 Stunden halbiert sich die Konzentration.

c) Zeitspanne bis zur eigentlichen 1. Einnahme:

$$5 = 10 \cdot 0,922^t \quad | :10$$

$$\frac{1}{2} = 0,922^t \quad | \ln$$

$$\ln(\frac{1}{2}) = t \cdot \ln(0,922) \quad | : \ln(0,922)$$

$$\frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(0,922)} = t$$

$$8,54 \approx t$$

⇒ Der Patient muss die Tablette eigentlich alle 8½ Stunden einnehmen. Da er die erste Tablette vergisst, nimmt er erst nach 2 · 8,5 = 17 Stunden die nächste Dosis:

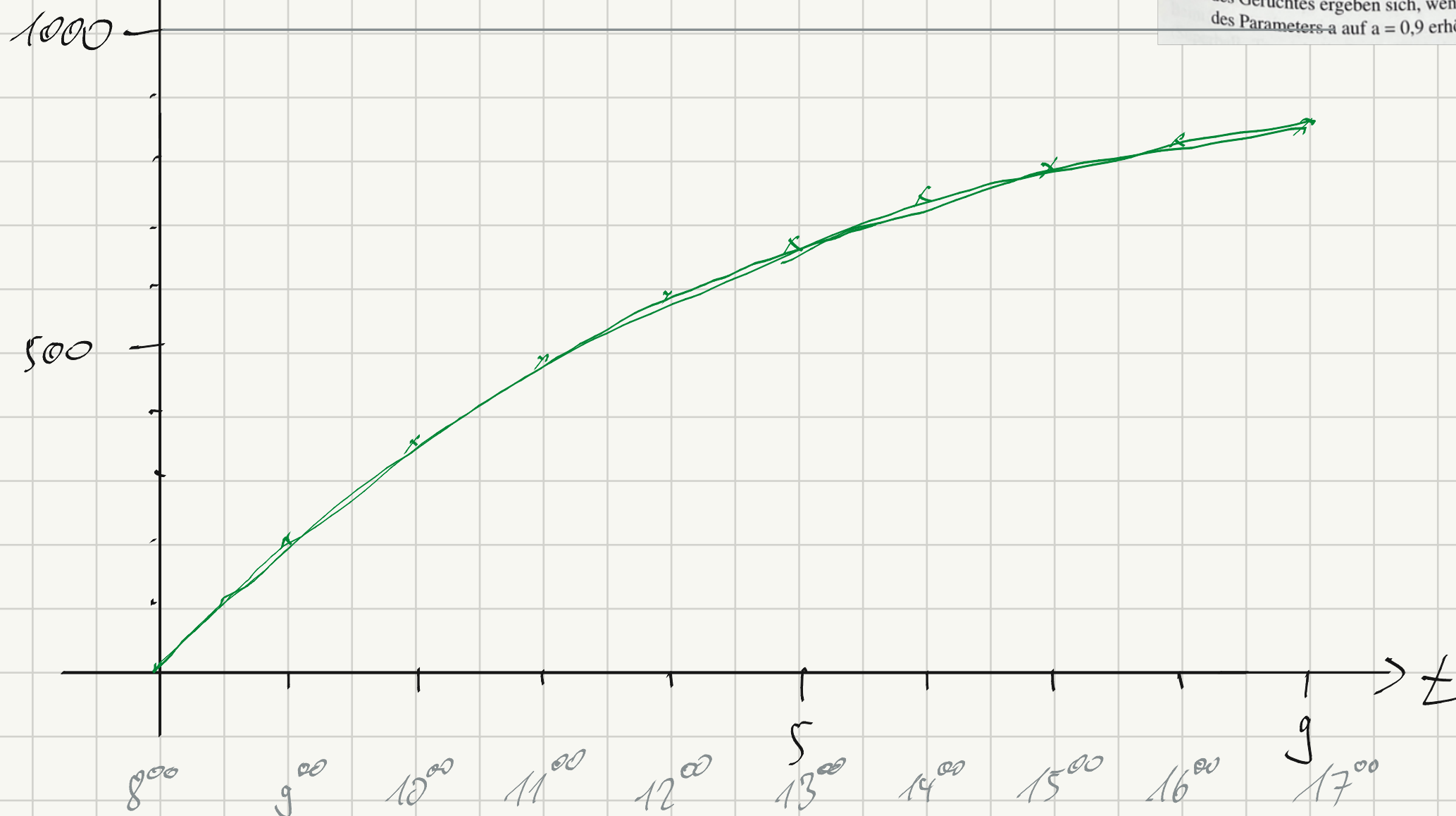
$$f(17) = 10 \cdot 0,922^{17} \approx 2,51$$

Antwort: Direkt vor der Einnahme besagter 1. Dosis hat der Patient noch eine Konzentration von etwa 2,5 µg/ml im Blut.

$$a) N(t) = b - c \cdot a^t$$

$$N(t) = 1000 - 995 \cdot 0,8^t$$

↑ Schüler



$$b) 9^{00} : t = 1 \quad N(1) = 1000 - 995 \cdot 0,8^1 = \underline{204}$$

$$12^{00} : t = 4 \quad N(4) = 1000 - 995 \cdot 0,8^4 = 592,448$$

$$17^{00} : t = 9 \quad N(9) = 1000 - 995 \cdot 0,8^9 \approx \underline{866,45}$$

Halbierungs-
zeit:

4

Hier geht die Formel für die Halbwertszeit nicht, da hier ja ein anderes Modell vorliegt!

$$\begin{aligned} 500 &= 1000 - 995 \cdot 0,8^t & | -1000 \\ -500 &= -995 \cdot 0,8^t & | : (-1) \\ 500 &= 995 \cdot 0,8^t & | : 995 \end{aligned}$$

$$\frac{100}{199} = 0,8^t$$

$$\ln\left(\frac{100}{199}\right) = t \cdot \ln(0,8)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{100}{199}\right)}{\ln(0,8)} = t$$

$$\underline{\underline{3,08 \approx t}}$$

$$\begin{aligned} & | \ln \\ & | : \ln(0,8) \end{aligned}$$

Antwort:

16. Hast Du schon gehört ...

An einer Schule mit 1000 Schülern wird pünktlich um 8 Uhr das Gerücht gestreut, dass es eine Woche Ferienverlängerung gibt. Das Gerücht verbreitet sich nach der Formel $N(t) = b - c \cdot a^t$, d. h. der Formel für *begrenztes exponentielles Wachstum*.

Hierbei ist $a = 0,8$, $c = 995$ und $b = 1000$ (t in Stunden, $N(t)$ in Personen).

a) Zeichnen Sie die Wachstumsfunktion für das Intervall $0 \leq t \leq 9$ (8 Uhr: $t = 0$).

Welche Bedeutung haben die Parameter a , b und c ?

b) Wie viele Schüler kennen das Gerücht schon um 9 Uhr, um 12 Uhr, um 17 Uhr?

Wann kennt die Hälfte der Schüler das Gerücht?

c) Wie viele Personen streuten das Gerücht zu Beginn des Prozesses?

d) Welche Unterschiede bei der Verbreitung des Gerüchtes ergeben sich, wenn der Wert des Parameters a auf $a = 0,9$ erhöht wird?



c)

$$t=0$$

$$N(0) = 1000 - 995 \cdot 0,8^0 = 5$$

Antwort: ...

d)

$a=0,8$ $a=0,9$

M	%	f(x)	g(x)
1	0	5	5
2	1	204	104,5
3	2	363,2	194,05
4	3	490,56	274,64

Wie man schon den ersten Einträgen in der Wertetabelle entnehmen kann, wächst die Kurve mit dem a-Wert 0,9 langsamer an. Das Gerücht verbreitet sich als langsamer, je höher der a-Wert ist.

Begründung: Bei einer Erhöhung des Wertes „a“ zerfällt die Menge der noch nicht infizierten Schüler*innen weniger langsamer als bei einem geringeren „a“-Wert. Ein Abbremsen des Zerfalls der Gruppe der bislang Nicht-Infizierten bremst somit zwangsläufig auch das Wachstum des Gerüchts im Ganzen betrachtet.

$$N(t) = 1000 - 995 \cdot 0,8^t$$

↑
Menge
der noch
nicht
infizierten
Schüler

↑
Zerfallsfaktor für
die Menge der
noch nicht infizierten
Schüler

$()^x$
:
+ -

$$\ln(a-b) = \dots$$

Exponentialgleichungen mit Hilfe von Logarithmusgesetzen lösen

Satz IV.1 Logarithmengesetze

a und b seien positive reelle Zahlen.

r sei eine beliebige reelle Zahl.

Dann gelten folgende Gesetze:

(1) $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

(2) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

(3) $\log(a^r) = r \cdot \log a$

Satz IV.2

Operation und Umkehroperation:

(4) $\log 10^x = x$

(5) $10^{\log x} = x$

Besondere Zehnerlogarithmen:

$\log 10 = 1, \log 1 = 0$

1. Berechnen Sie:

a) $3^{2x+1} = 243$

b) $5^{2x+3} = 15625$

c) $2^{4x+3} = 128$

d) $4^{3x-2} = 16384$

e) $6^{5x-2} = 1296$

f) $4 \cdot 3,2^{2x-3} = 131,072$

①

a) $3^{(2x+1)} = 243$

$(2x+1) \cdot \ln(3) = \ln(243)$

$2x \cdot \ln(3) + 1 \cdot \ln(3) = \ln(243) \quad | -\ln(3)$

$x \cdot 2 \cdot \ln(3) = \ln(243) - \ln(3) \quad | : 2 \cdot \ln(3)$

$x = \frac{\ln(243) - \ln(3)}{2 \cdot \ln(3)}$

$x = 2$

$\mathbb{L} = \{2\}$

b) $5^{2x+3} = 15.625 \quad | \ln$

$(2x+3) \cdot \ln(5) = \ln(15.625)$

$2 \cdot x \cdot \ln(5) + 3 \cdot \ln(5) = \ln(15.625) \quad | - 3 \cdot \ln(5)$

$x \cdot 2 \cdot \ln(5) = \ln(15.625) - 3 \cdot \ln(5) \quad | : 2 \cdot \ln(5)$

$x = \frac{\ln(15.625) - 3 \cdot \ln(5)}{2 \cdot \ln(5)}$

$x = 1,5$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{1,5\}$

2

2 Berechnen Sie:

a) $5 \cdot 1,8^{4x-3} = 29,16$ b) $8 \cdot 7,5^{5x-8} = 450$ c) $2,5 \cdot 40^{-x} = 342$

d) $3,8 \cdot 5^{5-x} = 475$ e) $2,4 \cdot 50^{3-x} = 0,048$ f) $5,6 \cdot 20^{2-x} = 0,0007$

a) $5 \cdot 1,8^{4x-3} = 29,16 \quad | :5$

$$1,8^{4x-3} = \frac{729}{125} \quad | \ln$$

$$(4x-3) \cdot \ln(1,8) = \ln\left(\frac{729}{125}\right)$$

$$4x \cdot \ln(1,8) - 3 \cdot \ln(1,8) = \ln\left(\frac{729}{125}\right) \quad | + 3 \cdot \ln(1,8)$$

$$x \cdot 4 \cdot \ln(1,8) = \ln\left(\frac{729}{125}\right) + 3 \cdot \ln(1,8) \quad | : 4 \cdot \ln(1,8)$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{729}{125}\right) + 3 \cdot \ln(1,8)}{4 \cdot \ln(1,8)}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{3}{2} = 1,5}} \quad \text{IL} = \{1,5\}$$

b) $8 \cdot 7,5^{5x-8} = 450 \quad | :8$

$$7,5^{5x-8} = 56,25$$

$$(5x-8) \cdot \ln(7,5) = \ln(56,25)$$

$$5x \cdot \ln(7,5) - 8 \cdot \ln(7,5) = \ln(56,25) \quad | + 8 \cdot \ln(7,5)$$

$$5x \cdot \ln(7,5) = \ln(56,25) + 8 \cdot \ln(7,5) \quad | : 5 \cdot \ln(7,5)$$

$$x = \frac{\ln(56,25) + 8 \cdot \ln(7,5)}{5 \cdot \ln(7,5)}$$

$$x = 2$$

c) $2,5 \cdot 40^{-x} = 342$

$$2,5 \cdot \frac{1}{40^x} = 342 \quad | \cdot 40^x$$

$$2,5 \cdot 1 = 342 \cdot 40^x \quad | \ln$$

$$\ln(2,5) = \ln(342 \cdot 40^x)$$

$$\ln(2,5) = \ln(342) + \ln(40^x) \quad | - \ln(342)$$

$$\ln(2,5) - \ln(342) = \ln(40^x)$$

$$\ln(2,5) - \ln(342) = x \cdot \ln(40) \quad | : \ln(40)$$

$$\frac{\ln(2,5) - \ln(342)}{\ln(40)} = x$$

$$-1,333 \approx x$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

3. Berechnen Sie:

a) $8 \cdot 9^{4-3x} = \frac{8}{9}$

b) $3^{2x-1} = 9^{2x-3}$

c) $2^{3x+1,6} = 4^{2x-0,1}$

d) $16^{2x+1} = 4^{2x+3}$ e) $3,5^{x-1} = 12,25^{x-2}$ f) $2 \cdot 4^{x+1} = 1,6 \cdot 20^{2x-1}$

③ a) $8 \cdot 9^{4-3x} = \frac{8}{9} \quad | :8$
 $9^{(4-3x)} = \frac{1}{9} \quad | \ln$
 $(4-3x) \cdot \ln(9) = \ln\left(\frac{1}{9}\right) \quad | \ln(9)$
 $4-3x = \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{\ln(9)}$
 $4-3x = -1 \quad | -4$
 $-3x = -5 \quad | :(-3)$
 $x = \frac{5}{3}$
 $\underline{\underline{L = \left\{ \frac{5}{3} \right\}}}$

b) $3^{2x-1} = 9^{2x-3} \quad | \ln$
 $(2x-1) \cdot \ln(3) = (2x-3) \cdot \ln(9) \quad | : \ln(3)$
 $(2x-1) = \frac{(2x-3) \cdot \ln(9)}{\ln(3)}$
 $(2x-1) = (2x-3) \cdot \frac{\ln(9)}{\ln(3)}$
 $(2x-1) = (2x-3) \cdot 2$
 $2x-1 = 4x-6 \quad | -2x$
 $-1 = 2x-6 \quad | +6$
 $5 = 2x \quad | :2$
 $\underline{\underline{2,5 = x}}$

$\underline{\underline{L = \{2,5\}}}$

c) $2^{3x+1,6} = 4^{2x-0,1}$
 $(3x+1,6) \cdot \ln(2) = (2x-0,1) \cdot \ln(4) \quad | : \ln(2)$
 $(3x+1,6) = (2x-0,1) \cdot \frac{\ln(4)}{\ln(2)}$
 $3x+1,6 = (2x-0,1) \cdot 2$
 $3x+1,6 = 4x-0,2 \quad | -3x$
 $1,6 = x-0,2 \quad | +0,2$
 $\underline{\underline{1,8 = x}}$

$\underline{\underline{L = \{1,8\}}}$

d) $16^{2x+1} = 4^{2x+3} \quad | \ln$
 $(2x+1) \cdot \ln(16) = (2x+3) \cdot \ln(4) \quad | : \ln(4)$
 $(2x+1) \cdot \frac{\ln(16)}{\ln(4)} = 2x+3$
 $(2x+1) \cdot 2 = 2x+3$
 $4x+2 = 2x+3 \quad | -2x$
 $2x+2 = 3 \quad | -2$
 $2x = 1 \quad | :2$
 $\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$
 $\underline{\underline{L = \left\{ \frac{1}{2} \right\}}}$

4. Berechnen Sie:

a)

$$(38416)^{\frac{1}{x}} = 14$$

b)

$$(1764)^{\frac{1}{x}} = 42$$

c)

$$(83521)^{\frac{1}{x-2}} = 17$$

d)

$$(29791)^{\frac{1}{x-1}} = 31$$

e)

$$(117649)^{\frac{1}{x-4}} = 49$$

f)

$$(27)^{\frac{1}{2x+1}} = 3^x$$

$$b) \quad 1764^{\frac{1}{x}} = 42 \quad | \ln$$

$$\frac{1}{x} \cdot \ln(1764) = \ln(42) \quad | : \ln(1764)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\ln(42)}{\ln(1764)}$$

$$\frac{1}{x} = 0,5 \quad | \cdot x$$

$$1 = 0,5x \quad | : 0,5$$

$$\underline{\underline{2 = x}} \quad // = \{2\}$$

$$d) \quad 29.791^{\frac{1}{x-1}} = 31 \quad | \ln$$

$$\frac{1}{x-1} \cdot \ln(29.791) = \ln(31) \quad | \cdot (x-1)$$

$$1 \cdot \ln(29.791) = \ln(31) \cdot (x-1) \quad | : \ln(31)$$

$$\frac{\ln(29.791)}{\ln(31)} = x-1$$

$$3 = x-1 \quad | +1$$

$$\underline{\underline{4 = x}}$$

$$// = \{4\}$$

5. Berechnen Sie:

a) $(64)^{\frac{1}{x-1}} = 2^x$ b) $(243)^{\frac{1}{x+2}} = 3^{x-4}$ c) $(125)^{\frac{1}{x+1}} = 2,5 \cdot 2^{x-1}$
d) $(512)^{\frac{1}{2x-3}} = 2 \cdot 2^{x-1}$ e) $(343)^{\frac{1}{5x-7}} = (49)^{\frac{1}{3x-4}}$ f) $(578)^{\frac{1}{2x-1}} = 8,33$

a) $64^{\frac{1}{x-1}} = 2^x \quad | \ln$

$\frac{1}{x-1} \cdot \ln(64) = x \cdot \ln(2)$

$\frac{\ln(64)}{x-1} = x \cdot \ln(2) \quad | \cdot (x-1)$

$\ln(64) = x \cdot \ln(2) \cdot (x-1) \quad | : \ln(2)$

$\frac{\ln(64)}{\ln(2)} = x \cdot (x-1)$

$6 = x^2 - x \quad | -6$

$0 = x^2 - x - 6$

$x_{1/2} = 0,5 \pm \sqrt{0,5^2 + 6}$

$x_1 = 3$

$x_2 = -2$

b)

$243^{\frac{1}{x+2}} = 3^{x-4} \quad | \ln$

$\frac{1}{x+2} \cdot \ln(243) = (x-4) \cdot \ln(3) \quad | \cdot (x+2)$

$1 \cdot \ln(243) = (x-4) \cdot (x+2) \cdot \ln(3) \quad | : \ln(3)$

$\frac{\ln(243)}{\ln(3)} = (x-4) \cdot (x+2)$

$5 = x^2 + 2x - 4x - 8 \quad | -5$

$0 = x^2 - 2x - 13$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 13}$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{14}$

$x_1 \approx 4,74$

$x_2 \approx -2,74$

d) $512^{\frac{1}{2x-3}} = 2 \cdot 2^{x-1} \quad | \ln$

$\frac{1}{2x-3} \cdot \ln(512) = \ln(2 \cdot 2^{x-1})$

$\frac{1}{2x-3} \cdot \ln(512) = \ln(2) + \ln(2^{x-1})$

$\frac{1}{2x-3} \cdot \ln(512) = \ln(2) + (x-1) \cdot \ln(2)$

$\frac{1}{2x-3} \cdot \ln(512) = \cancel{\ln(2)} + \ln(2) \cdot x - \cancel{\ln(2)}$

$\frac{1}{2x-3} \cdot \ln(512) = \ln(2) \cdot x \quad | \cdot (2x-3)$

$\ln(512) = \ln(2) \cdot x \cdot (2x-3)$

$\ln(512) = 2 \cdot \ln(2) \cdot x^2 - 3 \cdot \ln(2) \cdot x \quad | : \ln(2)$

$\frac{\ln(512)}{\ln(2)} = 2x^2 - 3x$

$9 = 2x^2 - 3x \quad | -9$

$0 = 2x^2 - 3x - 9 \quad | : 2$

$0 = x^2 - 1,5x - 4,5$

$x_{1/2} = 0,75 \pm \sqrt{0,75^2 + 4,5}$

$x_{1/2} = 0,75 \pm 2,25$

$x_1 = 3$

$x_2 = -1,5$

$\Rightarrow$

$$e) 343^{\frac{1}{5x-7}} = 49^{\frac{1}{3x-4}} \quad | \ln$$

$$\frac{1}{5x-7} \cdot \ln(343) = \frac{1}{3x-4} \cdot \ln(49) \quad | : \ln(49)$$

$$\frac{1}{5x-7} \cdot \frac{\ln(343)}{\ln(49)} = \frac{1}{3x-4}$$

$$\frac{1}{5x-7} \cdot 1,5 = \frac{1}{3x-4}$$

$$\frac{1,5}{5x-7} = \frac{1}{3x-4}$$

$$1 \cdot (5x-7) = 1,5 \cdot (3x-4)$$

$$5x-7 = 4,5x-6$$

$$0,5x-7 = -6$$

$$0,5x = 1$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

$$| -4,5x$$

$$| +7$$

$$| : 0,5$$

a) $4 \cdot 5^{2x-3} = 5 \cdot 10^{x-1}$

$$4 \cdot 5^{2x-3} = 5 \cdot 10^{x-1} \quad | : 4$$

$$5^{2x-3} = 1,25 \cdot 10^{x-1} \quad | \ln$$

$$\ln(5^{2x-3}) = \ln(1,25 \cdot 10^{x-1})$$

$$\ln(5^{2x-3}) = \ln(1,25) + \ln(10^{x-1})$$

$$(2x-3) \cdot \ln(5) = \ln(1,25) + (x-1) \cdot \ln(10)$$

$$2x \cdot \ln(5) - 3 \cdot \ln(5) = \ln(1,25) + x \cdot \ln(10) - \ln(10) \quad | - x \cdot \ln(10) \quad | + 3 \cdot \ln(5)$$

$$2x \cdot \ln(5) - x \cdot \ln(10) = \ln(1,25) - \ln(10) + 3 \cdot \ln(5)$$

$$x \cdot [2 \cdot \ln(5) - \ln(10)] = \ln(1,25) - \ln(10) + 3 \cdot \ln(5) \quad | : [2 \cdot \ln(5) - \ln(10)]$$

$$x = \frac{\ln(1,25) - \ln(10) + 3 \cdot \ln(5)}{2 \cdot \ln(5) - \ln(10)}$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

Themen	KA	3
--------	----	---

- Seite 206 (incl. Tabellenoperationen...)
- Anwendungsaufg. Exp.-Funkt.
- Logarithmusgesetze