Probeklassenarbeit lin. Fkt. 31.8.

(1) $f(x) = \frac{2}{5}x - 3$

(2) Differenzenquotient: $\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

$P(\frac{1}{4} | 2)$

$Q(8{,}2 | -\frac{3}{8})$

a) $m = \frac{-\frac{3}{8} - 2}{8{,}2 - \frac{1}{4}}$

$= -\frac{95}{318} \approx \underline{\underline{-0{,}3}}$

$\boxed{f(x) = m \cdot x + b}$

$2 = -0{,}3 \cdot 0{,}25 + b$

$2 = -\frac{3}{40} + b \quad | + \frac{3}{40}$

$\underline{\underline{\frac{83}{40} = 2{,}075 = b}}$

$\underline{\underline{f(x) = -0{,}3x + 2{,}075}}$

b) Schnittp. mit x-Achse: -3 | $\boxed{N(-3|0)}$

" " y-Achse: 9 | $\boxed{S_y(0|9)}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 0}{0 - (-3)} = \frac{9}{3} = \underline{\underline{3}}$$

$b = 9$

$$\underline{\underline{f(x) = 3x + 9}}$$

---

3 a) $P(9|-3)$ $\qquad f(x) = \frac{1}{3}x - 6$

$$-3 = \frac{1}{3} \cdot 9 - 6$$
$$-3 = 3 - 6$$
$$-3 = -3 \ \checkmark$$

$\Rightarrow$ P liegt auf der Geraden von f(x).

b) $Z(\overset{x}{3 \cdot u} \mid \overset{y}{5})$ $\qquad f(x) = \frac{1}{3}x - 6$

$$5 = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot u}_{} - 6$$

$$5 = 1u - 6 \qquad \mid +6$$

$$11 = u$$

$\Rightarrow$ Für eine Wahl von $u = 11$ liegt Z auf der Geraden von $f(x)$.

---

c) Schnittpunkt mit

x-Achse $\boxed{y = 0}$

$$0 = \frac{1}{3}x - 6 \qquad \mid +6$$

$$6 = \frac{1}{3}x \qquad \mid : \frac{1}{3}$$

$$18 = x$$

$$\underline{N(18 \mid 0)}$$

y-Achse $\boxed{x = 0}$

$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0 - 6$$

$$f(0) = 0 - 6$$

$$f(0) = -6$$

$$\underline{S_y(0 \mid -6)}$$

d) $-\frac{1}{3}x - 4 = \frac{1}{3}x - 6 \quad | +\frac{1}{3}x$

$-4 = \frac{2}{3}x - 6 \quad | +6$

$2 = \frac{2}{3}x \quad | : \frac{2}{3}$

$3 = x$

$g(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3 - 4$

$g(3) = -1 - 4$

$g(3) = -5$

$\underline{\underline{S(3|-5)}}$

---

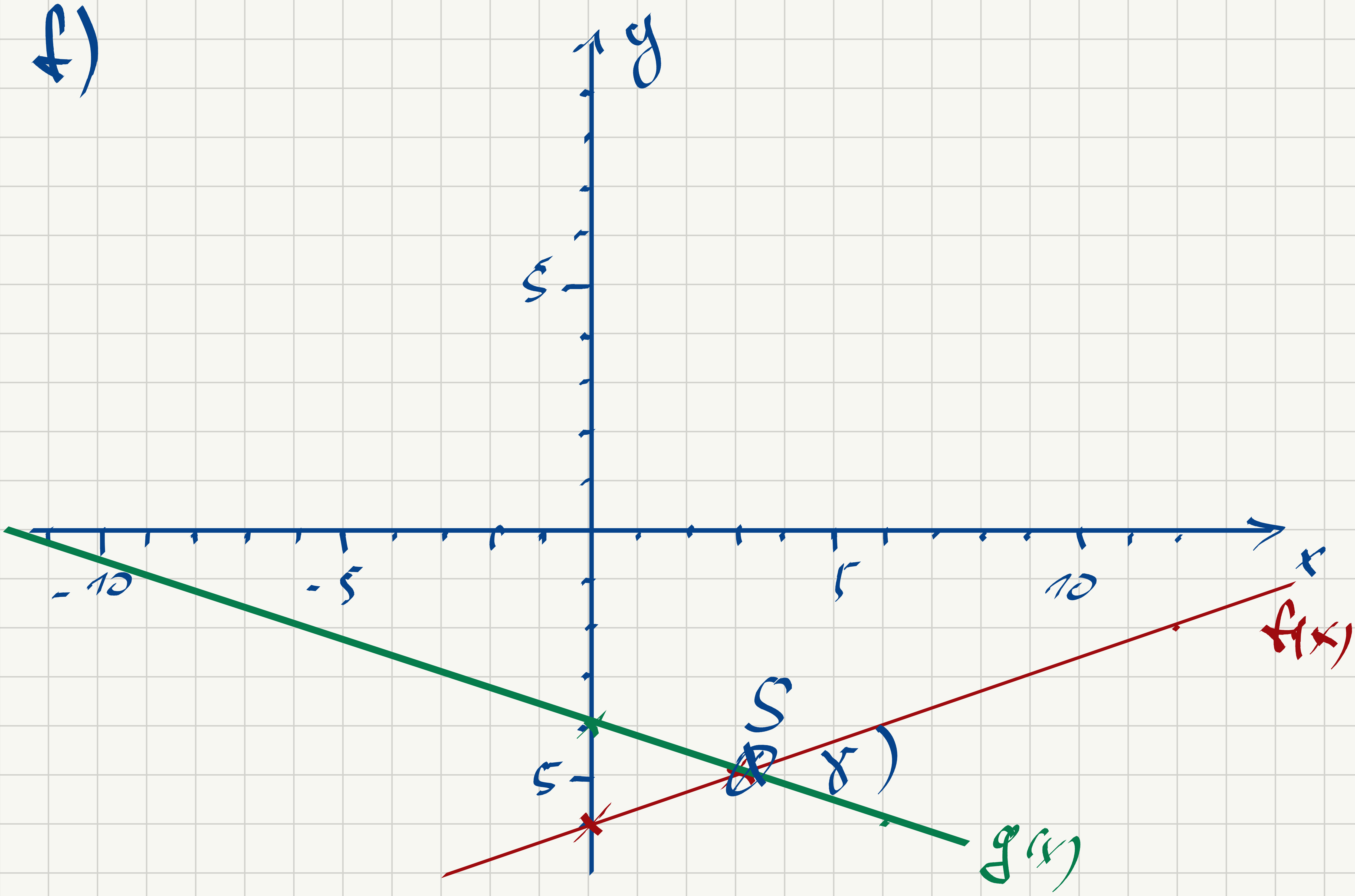
e) Steigungswinkel f $\boxed{\tan^{-1}(\frac{1}{3})}$: $\alpha \approx 18{,}4°$

Steigungswinkel g $\boxed{\tan^{-1}(-\frac{1}{3})}$: $\beta \approx -18{,}4°$

Schnittwinkel: $\gamma = \alpha - \beta = 18{,}4° - (-18{,}4°)$

$= \underline{\underline{36{,}8°}}$

f)



④ a) $f(x) = 12{,}5x + 50$

b) $\boxed{f(x) = 140}$

$140 = 12{,}5x + 50 \quad | -50$

$90 = 12{,}5x \quad | :12{,}5$

$7{,}2 = x$

Antwort: In etwas mehr als 7 Tagen muss der Haufen abgefahren werden.

c) $\boxed{f(x) = 0}$

$$0 = 12{,}5x + 50 \quad | -50$$
$$-50 = 12{,}5x \quad | : 12{,}5$$
$$-4 = x$$

<u>Antwort:</u> Vor genau 4 Tagen wurde Harden zum letzten Mal abgefahren.

Code Knell

→ zum Knacken von Textaufg. bei linearen Funktionen

1) Um welche **beiden** Größen geht es?

2) ∘ Welche Größe ist abhängig? (y)
∘ " " " unabhängig? → (x)

3)

- "pro" "je" "täglich" ... (m)
- "Wert zu Beginn" "Grundgebühr" (+)? ↓? (−)
  "Startwert" "momentan" "jetzt" (b)
- "Bei [Größe 1] .... waren es [Größe 2] ...."
  ↓ P(x | y)

7. Holger hat gerade sein Medizinstudium mit Erfolg abgeschlossen und beteiligt sich an einem Mediziner Austauschprogramm. Er geht für 1 Jahr in die USA. Aus Washington kommt dafür George nach Deutschland. In Deutschland wird die Temperatur in grad Celsius [^{0}C], in Amerika in grad Fahrenheit [^{0}F] gemessen. Holger und George wissen aus dem Studium, das zwischen beiden Temperaturskalen ein linearer Zusammenhang besteht und 0 ^{0}C einer Temperatur von 32 ^{0}F, sowie 100 ^{0}C einer Temperatur von 212 ^{0}F entspricht. Sie interessieren sich für eine Funktionsgleichung mit der sie Temperaturen schnell in die für sie jeweils vertraute Einheit umrechnen können.

a) Stellen Sie für Holger eine Funktionsgleichung auf, die die Umrechnung von ^{0}F in ^{0}C erlaubt.

b) Stellen Sie für George eine Funktionsgleichung auf, die die Umrechnung von ^{0}C in ^{0}F erlaubt.

c) Die Temperatur in einem Wannenbad beträgt 95 ^{0}F, wie viel ^{0}C wären das?

d) Bei einer Körpertemperatur von 40 ^{0}C sollten fiebersenkende Maßnahmen getroffen werden. Welcher Temperatur entspräche das in ^{0}F?

Holger: $P_1(32|0)$
(°F|°C) $P_2(212|100)$

George: $P_1(0|32)$
(°C|°F) $P_2(100|212)$

a) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 0}{212 - 32} = \frac{5}{9}$

$$\boxed{g(x) = m \cdot x + b}$$

$0 = \frac{5}{9} \cdot 32 + b$

$0 = \frac{160}{9} + b \quad | -\frac{160}{9}$

$-\frac{160}{9} = b$

$$\boxed{g(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}}$$

b) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = 1{,}8$

$b = 32$ (siehe P_1)

$$\boxed{g(x) = 1{,}8x + 32}$$

Nullstellenberechnung:

Wenn Funktion in der SP-Form:

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x-4)^2+1$$

$$0 = -\frac{1}{4}\cdot(x-4)^2+1 \quad \vert -1$$

$$-1 = -\frac{1}{4}\cdot(x-4)^2 \quad \vert :\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$4 = (x-4)^2 \quad \vert \sqrt{}$$

$$\pm 2 = x_{1/2}-4 \quad \vert +4$$

$$4\pm 2 = x_{1/2}$$

$$6 = x_1 \Rightarrow N_1(6/0)$$

$$2 = x_2 \Rightarrow N_2(2/0)$$

Wenn Funktion in der allg. Form:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 10$$

Normalform

$$0 = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 10 \quad \Big| : \frac{1}{2}$$

$$0 = x^2 \underbrace{+8}_{p}x \underbrace{-20}_{q}$$

<u>p-q-Formel:</u> $\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

$$x_{1/2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (-20)}$$

$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16 + 20}$$

$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{36}$$

$$x_{1/2} = -4 \pm 6$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -10$$

Wenn Funktion in der

Linearfaktordarstellung

$$f(x) = 3 \cdot (x - 4) \cdot (x + 8)$$

ablesen:

(mit Vorzeichen drehen)

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= -8 \end{aligned}}$$

Übungsblatt:

11 a) $0 = 8x^2 + 8x - 6 \quad |:8$

$0 = x^2 + x - \frac{6}{8}$

$x_{1/2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + \frac{6}{8}}$

$x_{1/2} = -0{,}5 \pm 1$

$x_1 = -1{,}5$

$x_2 = 0{,}5$

$SP(-\frac{1}{2} | -8)$

b) $0 = x^2 + x + 0$

$x_{1/2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 0}$

$x_{1/2} = -0{,}5 \pm 0{,}5$

$x_1 = 0$

$x_2 = -1$

$SP(-\frac{1}{2} | -\frac{1}{4})$

c) $0 = 3x^2 - 6x + 9 \quad |:3$

$0 = x^2 - 2x + 3$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 - 3}$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{-2}$ ↯

⇒ Es existieren keine Nullstellen

$SP(1 | 6)$

d) $0 = (x-3)^2 \quad |\sqrt{}$

$\pm 0 = x_{1/2} - 3 \quad |+3$

$3 \pm 0 = x_{1/2}$

$3 = x_1$

$3 = x_2$

$SP(3 | 0)$

e) $0 = (x - 0{,}5) \cdot (x + 2)$

$x_1 = 0{,}5$

$x_2 = -2$

$SP(-0{,}75 | -\frac{25}{16})$

f) $0 = (x-1)^2 + 1 \quad |-1$

$-1 = (x-1)^2 \quad |\sqrt{}$

$\sqrt{-1} = x - 1$ ↯

⇒ Es existieren keine Nullstellen

$SP(1 | 1)$

Weg 1) Von der SP-Form in die allg. Form:

SP-Form

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x-3)^2+4$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x^2-6x+9)+4$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2+1{,}5x-2{,}25+4$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2+1{,}5x+1{,}75$$

allg. Form

Weg 2) von der allg. Form in die SP-Form:

allg. Form

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2+1{,}5x+1{,}75$$

$$\boxed{\text{mit WTR: } \quad SP(3|4)}$$

$$f(x) = a\cdot(x-u)^2+v$$

SP-Form

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x-3)^2+4$$

Weg 3) von der Linearfaktordarst. in die allg. Form:

Lin.-Fakt.-Dst.:

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot[(x-7)\cdot(x+1)]$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x^2+x-7x-7)$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x^2-6x-7)$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2+1{,}5x+1{,}75$$

allg. Form

Weg 4) Von der allg. Form in die Lin.-Fakt.-Darst.:

allg Form $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1{,}5x + 1{,}75$

$$0 = -\frac{1}{4}x^2 + 1{,}5x + 1{,}75 \quad | :\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$0 = x^2 \underbrace{-6}_{p}x \underbrace{-7}_{q}$$

$$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9 + 7}$$

$$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{16}$$

$$x_{1/2} = 3 \pm 4$$

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = -1$$

Lin.-Fkt.-D. $\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x-7)\cdot(x+1)$

Weg 5) Von der SP-Form in die Lin.-Fkt.-Darst.:

SP-Form $f(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x-3)^2 + 4$

$$0 = -\frac{1}{4}\cdot(x-3)^2 + 4 \quad | -4$$

$$-4 = -\frac{1}{4}\cdot(x-3)^2 \quad | :\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$16 = (x-3)^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\pm 4 = x_{1/2} - 3 \quad | +3$$

$$3 \pm 4 = x_{1/2}$$

$$7 = x_1$$

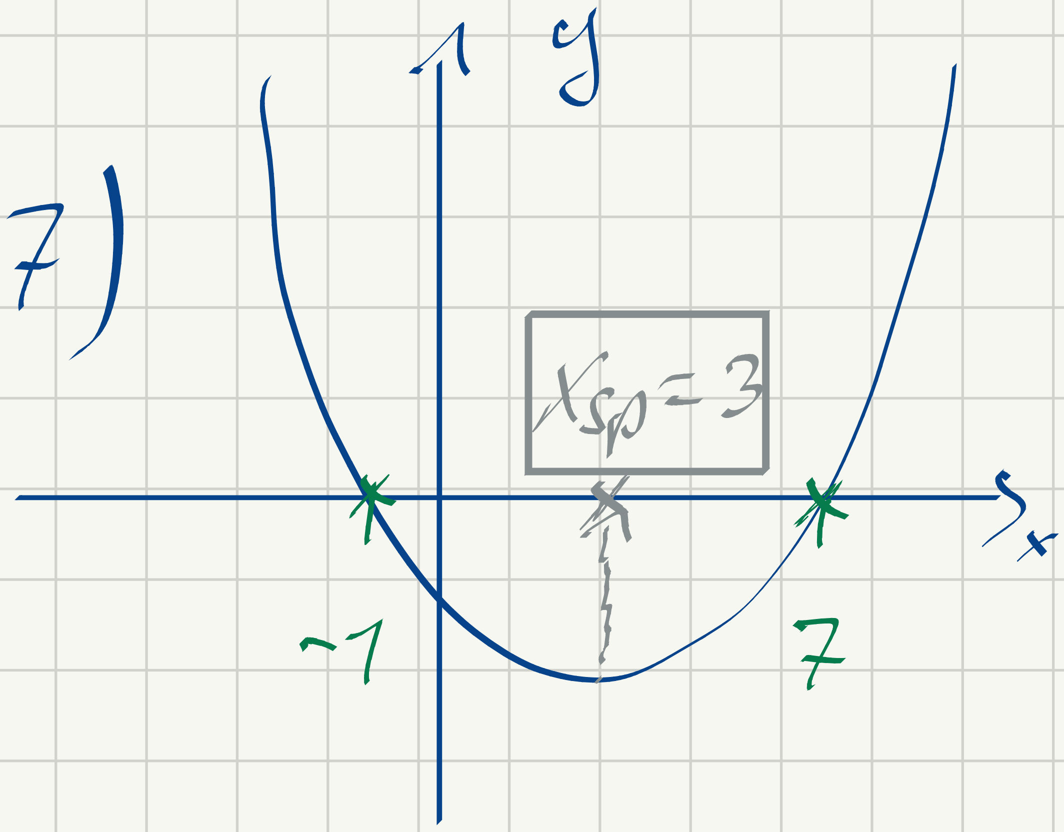
$$-1 = x_2$$

Lin. Fkt.-Drst. $f(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x-7)\cdot(x+1)$

Weg 6) Von der Lin.-Fakt.-Drst. in die SP-Form

Lin.-Fkt.-Drst.

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x+1)\cdot(x-7)$$



$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 7 \end{aligned}}$$

$$x_{sp} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$$

$$f(3) = -\frac{1}{4}\cdot(3+1)\cdot(3-7)$$

$$f(3) = 4$$

$$\Rightarrow S(3\,|\,4)$$

SP-Form

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x-3)^2 + 4}}$$

3.7.: Quadratische Funktion aus 3 gegebenen Punkten:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

$P_1(3 \mid \frac{1}{2})$

$P_2(-2 \mid 8)$

$P_3(4 \mid 2)$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \\ 8 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ 2 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} = 9a + 3b + c \\ 8 = 4a - 2b + c \\ 2 = 16a + 4b + c \end{array} \right| \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} = 9a + 3b + c \\ -8 = -4a + 2b - c \\ 2 = 16a + 4b + c \end{array} \right| \xrightarrow{+} \left| \begin{array}{l} -7{,}5 = 5a + 5b \\ -6 = 12a + 6b \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(-6) \\ \cdot 5 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 45 = -30a - 30b \\ -30 = 60a + 30b \end{array} \right|$$

$+$

$15 = 30a \quad | : 30$

$\underline{\underline{\frac{1}{2} = a}}$

mit $\boxed{-7{,}5 = 5a + 5b}$

und $\boxed{a = \frac{1}{2}}$

$-7{,}5 = 5 \cdot \frac{1}{2} + 5b$

$-7{,}5 = 2{,}5 + 5b \quad | -2{,}5$

$-10 = 5b \quad | : 5$

$\underline{\underline{-2 = b}}$

mit $\boxed{2 = 16a + 4b + c}$

und $\boxed{a = \frac{1}{2}}$ und $\boxed{b = -2}$

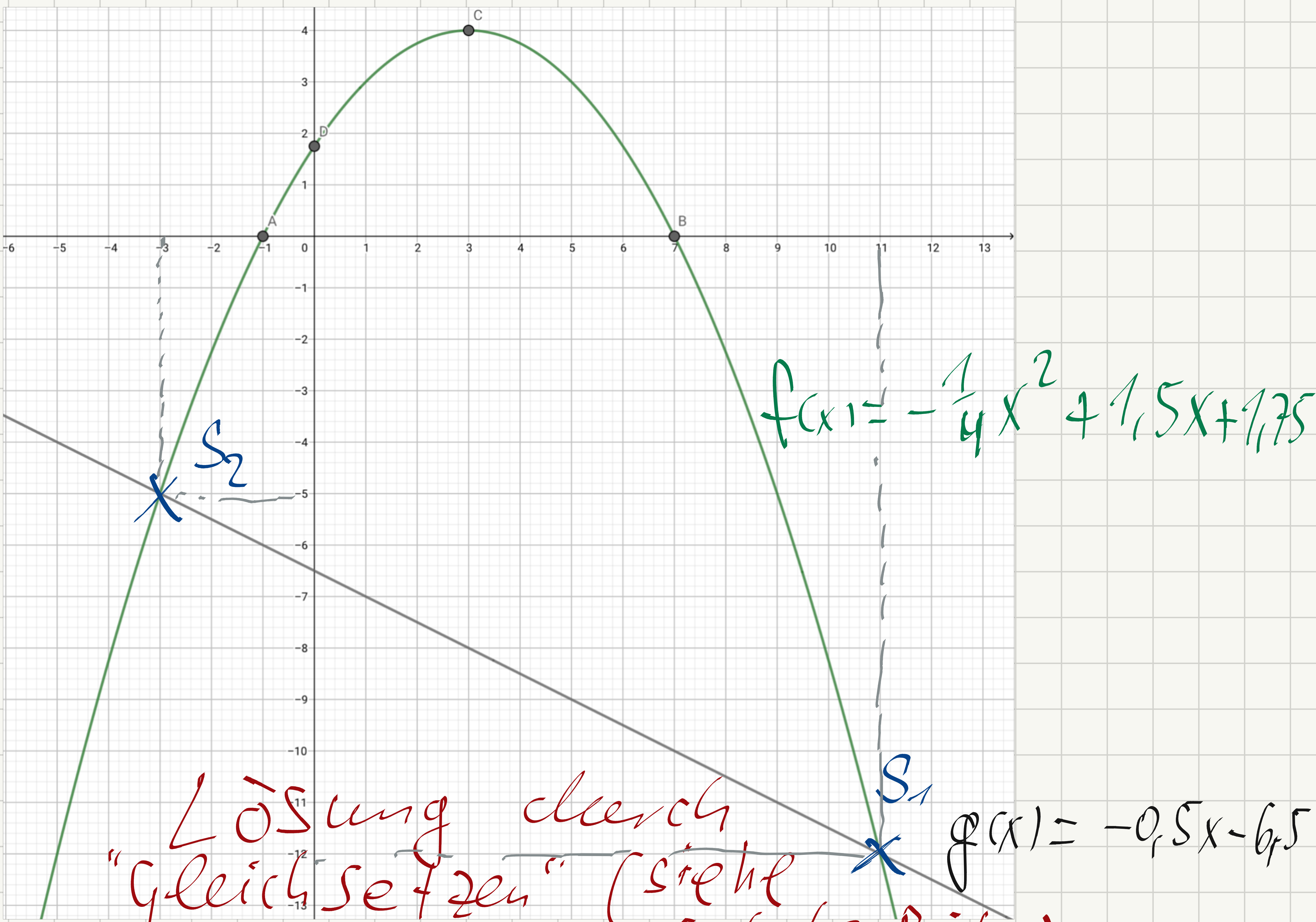
$2 = 16 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot (-2) + c$

$2 = 8 - 8 + c$

$\underline{\underline{2 = c}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2}}$

3.6: Schnittpunkte aus Parabel u. Gerade



Lösung durch "Gleichsetzen" (siehe nächste Seite)

$$-\frac{1}{4}x^2 + 1{,}5x + 1{,}75 = -0{,}5x - 6{,}5 \quad | +0{,}5x$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1{,}75 = -6{,}5 \quad | +6{,}5$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 8{,}25 = 0 \quad | :\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$x^2 \underbrace{-8}_{p} x \underbrace{-33}_{q} = 0$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 + 33}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{49}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm 7$$

$$\underline{x_1 = 11}$$

$$\underline{\underline{x_2 = -3}}$$

$$g(11) = -0{,}5 \cdot 11 - 6{,}5$$

$$g(11) = -12 \quad \Rightarrow S_1(11 | -12)$$

$$g(-3) = -0{,}5 \cdot (-3) - 6{,}5$$

$$g(-3) = -5 \quad \Rightarrow S_2(-3 | -5)$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1{,}5x + 1{,}75$$
$$g(x) = -0{,}5x + b$$

$$-0{,}5x + b = -\frac{1}{4}x^2 + 1{,}5x + 1{,}75 \quad | +0{,}5x$$
$$b = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1{,}75 \quad | -b$$
$$0 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1{,}75 - b \quad | :\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$0 = x^2 \underbrace{-8}_{p}x \underbrace{-7+4b}_{q}$$

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - (-7+4b)}$$

Diskriminante

$$16 - (-7 + 4\cdot b) = 0$$
$$16 + 7 - 4\cdot b = 0$$
$$23 - 4\cdot b = 0 \quad | -23$$
$$-4\cdot b = -23 \quad | :(-4)$$
$$b = \frac{23}{4} = 5{,}75$$

Ganzrationale Funktionen:

allgemeines Bildungsgesetz:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Nullstellenberechnung:

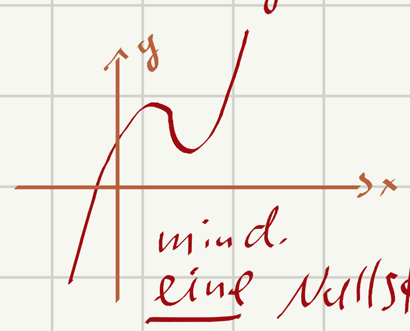
Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion:

maximal:

Fundamentalsatz der Algebra:
Eine Funktion hat maximal so viele Nullstellen, wie ihr Grad groß ist

minimal:

Grad ungerade



mind. eine Nullstelle

Grad gerade

mind. keine Nullstelle

Nullstellenberechnungsverfahren:

1) "x" ausklammern: (Geht nur, wenn das absolute Glied fehlt)

$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - 8x$

$0 = \underbrace{-\frac{1}{2}x^3}\ \underbrace{+4x^2}\ \underbrace{-8x}$

$0 = x \cdot (-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8) \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$

Restproblem

$0 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8 \quad | : (-\frac{1}{2})$

$0 = x^2 - 8x + 16$

$x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 16}$

$x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{16 - 16}$

$x_{2/3} = 4 \pm 0$

$\underline{x_2 = x_3 = 4}$

$0 = 4x^3 + 2x^2$

$0 = x^2(4x + 2) \Rightarrow \underline{x_1 = x_2 = 0}$

$0 = 4x + 2 \quad | -2$

$-2 = 4x \quad | : 4$

$\underline{-0{,}5 = x_3}$

oder

Beispielaufgaben:

1) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 10x$

$0 = 2x^3 - 6x^2 - 10x$

$0 = x \cdot (2x^2 - 6x - 10) \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$

$0 = 2x^2 - 6x - 10 \quad | : 2$

$0 = x^2 - 3x - 5$

$x_{2/3} = 1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 + 5}$

$x_{2/3} \approx 1{,}5 \pm 2{,}69$

$x_2 = 4{,}19$

$x_3 = -1{,}19$

2) $f(x) = 4x^3 + 2x^2$

$0 = 4x^3 + 2x^2$

$0 = x \cdot (4x^2 + 2x) \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$

$0 = 4x^2 + 2x$

$0 = x \cdot (4x + 2) \Rightarrow x_2 = 0$

$0 = 4x + 2 \quad | -2$

$-2 = 4x \quad | : 4$

$-0{,}5 = x_3$

2) Substitutionsverfahren (Geht nur, wenn die vorhandenen Exponenten alle ganzzahlige Vielfache sind.)

Test: $4 : 2 = 2$ ✓ ☺

$(x^2)^{\boxed{2}} = x^4$

$f(x) = -2x^4 + 16x^2 + 32$

$0 = -2x^4 + 16x^2 + 32$

substituiere:

$()^2 \quad x^2 = a \quad ()^2$

$ x^4 = a^2$

$0 = -2 \cdot a^2 + 16 \cdot a + 32 \quad | :(-2)$

$0 = a^2 - 8a - 16$

$a_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16+16}$

$a_{1/2} = 4 \pm \sqrt{32}$

$a_{1/2} \approx 4 \pm 5{,}66$

$\underline{a_1 = 9{,}66}$

$\underline{a_2 = -1{,}66}$

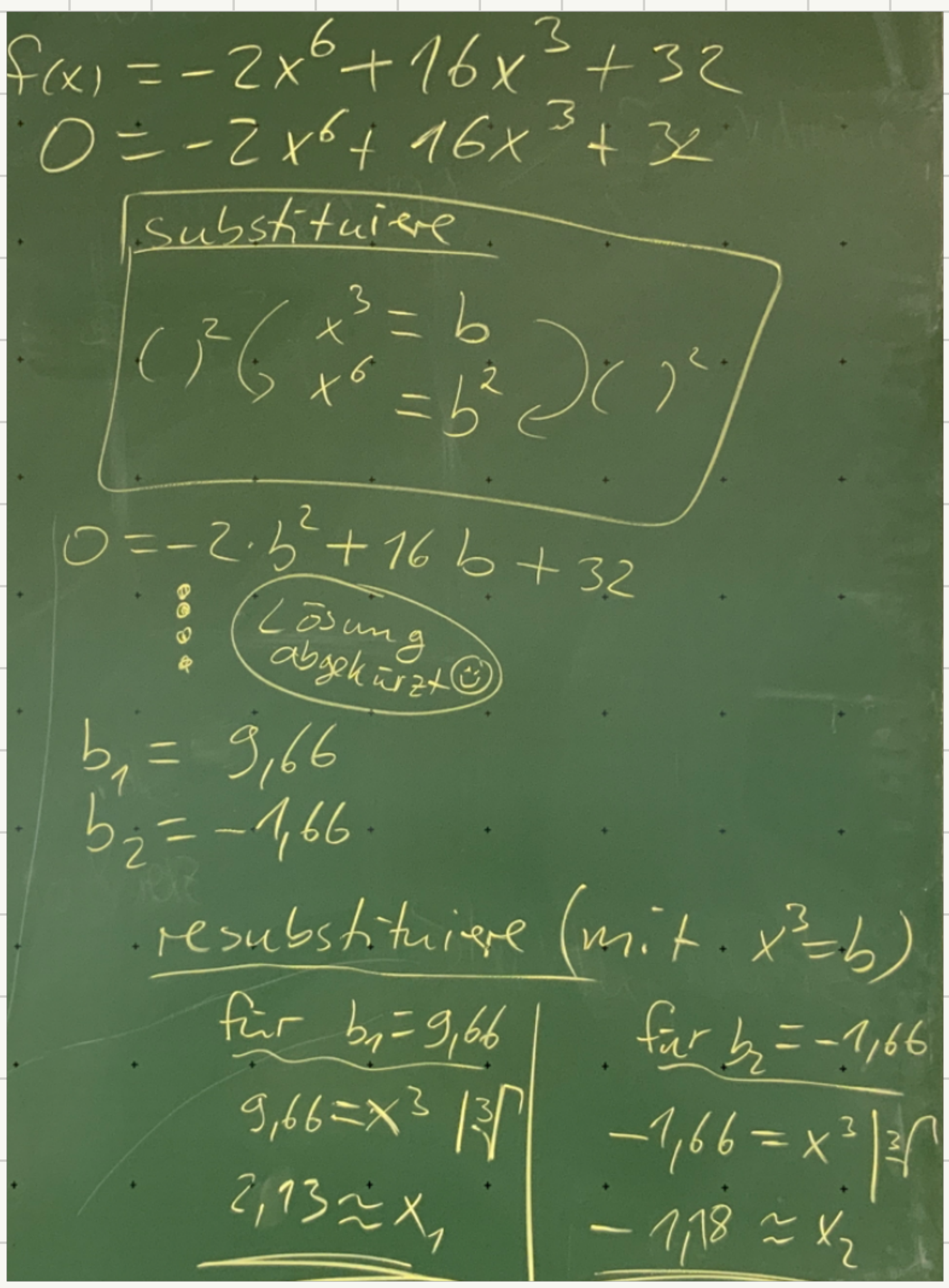
resubstituiere (mit $x^2 = a$)

für $a_1 = 9{,}66$	für $a_2 = -1{,}66$
$x^2 = 9{,}66 \quad \vert \sqrt{\ }$	$x^2 = -1{,}66 \quad \vert \sqrt{\ }$
$\underline{x_1 \approx 3{,}1}$	$\underline{x_3 = \text{n.d.}}$
$\underline{x_2 \approx -3{,}1}$	$\underline{x_4 = \text{n.d.}}$

$N_1(3{,}1 \,|\, 0)$

$N_2(-3{,}1 \,|\, 0)$

Alternative Konstellation:



Übungsaufgabe

1 Berechnen Sie die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen der Funktion (ohne Wertetafel).

x a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$
x b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
x c) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2$
d) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$
e) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
f) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 2x - 40$
x g) $f(x) = x^3 - x$
x h) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
i) $f(x) = x^3 - x^2 - 1{,}25x + 0{,}75$
j) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$
x k) $f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{9}{10}x$
l) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$
x m) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2$
n) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$

a) $0 = x^4 - 8x^2 + 15$

Substituiere:
$x^2 = z$
$x^4 = z^2$

$0 = z^2 - 8 \cdot z + 15$
$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16-15}$
$x_{1/2} = 4 \pm 1$
$x_1 = 5$
$x_2 = 3$

resubstituiere: (mit $x^2 = z$)

für $z_1 = 5$
$x^2 = 5 \quad |\sqrt{\ }$
$x_1 \approx 2{,}23$
$x_2 \approx -2{,}23$

für $z_2 = 3$
$x^2 = 3 \quad |\sqrt{\ }$
$x_3 \approx 1{,}73$
$x_4 \approx -1{,}73$

b) $0 = x^3 - 2x^2 + x$
$0 = x \cdot (x^2 - 2x + 1) \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$
$0 = x^2 - 2x + 1$
$x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 1}$
$x_{2/3} = 1 \pm 0$
$\underline{\underline{x_2 = x_3 = 1}}$

c) $0 = x^4 + 6x^3 + 8x^2$
$0 = x^2 \cdot (x^2 + 6x + 8) \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = x_2 = 0}}$
$0 = x^2 + 6x + 8$
$x_{3/4} = -3 \pm \sqrt{9-8}$
$x_{3/4} = -3 \pm 1$
$\underline{\underline{x_3 = -4}}$
$\underline{\underline{x_4 = -2}}$

g) $0 = x^3 - x$
$0 = x \cdot (x^2 - 1) \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$
$0 = x^2 - 1 \quad | +1$
$1 = x^2 \quad |\sqrt{\ }$
$\underline{\underline{\pm 1 = x_{2/3}}}$

h) $0 = x^4 - 5x^2 + 4$

$\boxed{\text{substituiere: } x^2 = z,\ x^4 = z^2}$

$0 = z^2 - 5z + 4$
$z_{1/2} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4}$
$z_{1/2} = 2{,}5 \pm 1{,}5$
$z_1 = 4$
$z_2 = 1$

resubstituiere (mit $x^2 = z$)

für $z_1 = 4$
$x^2 = 4 \quad |\sqrt{\ }$
$\underline{\underline{x_1 = 2}}$
$\underline{\underline{x_2 = -2}}$

für $z_2 = 1$
$x^2 = 1 \quad |\sqrt{\ }$
$\underline{\underline{x_3 = 1}}$
$\underline{\underline{x_4 = -1}}$

Loop:

1) $\_\_ : \boxed{x} = \sim$

2) $\sim \cdot \boxed{(x-2)} = \sim$

3) "Rest" $\ominus$

$$9375 : \boxed{5} = 18$$
$$\begin{array}{l} -5 \\ \hline 43 \\ -40 \\ \hline 37 \end{array}$$

... weiter bis Ende...

d) $\boxed{f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24}$

1. Nullstelle geben: $x_1 = 2$

$$(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) : \boxed{(x-2)} = x^2 - 7x + 12$$
$$\begin{array}{l} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline 0 \quad -7x^2 + 26x \\ \quad -(-7x^2 + 14x) \\ \hline \quad 0 \quad + 12x - 24 \\ \quad \quad -(12x - 24) \\ \hline \quad \quad 0 + 0 \end{array}$$

Restproblem

$$0 = x^2 - 7x + 12$$
$$x_{2/3} = 3{,}5 \pm \sqrt{3{,}5^2 - 12}$$
$$x_{2/3} = 3{,}5 \pm 0{,}5$$
$$x_2 = 4$$
$$x_3 = 3$$

---

e) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

1. Nullstelle "raten": Verdacht $x = 1$

$f(1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 0$ ✓ $\Rightarrow x_1 = 1$

$$(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x-1) = x^2 + 5x + 6$$
$$\begin{array}{l} -(x^3 - 1x^2) \\ \hline 0 \quad + 5x^2 + x \\ \quad -(5x^2 - 5x) \\ \hline \quad 0 \quad + 6x - 6 \\ \quad \quad -(6x - 6) \\ \hline \quad \quad 0 + 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 + 5x + 6$$
$$x_{2/3} = -2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 6}$$
$$x_{2/3} = -2{,}5 \pm 0{,}5$$
$$x_2 = -3$$
$$x_3 = -2$$

f) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 2x - 40$

1. Nullstelle "raten": Verdacht $x = 2$

$f(2) = 2^3 + 7 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 40$

$f(2) = 0$ ✓ $\Rightarrow x_1 = 2$

$$
\begin{aligned}
&(x^3 + 7x^2 + 2x - 40) : (x - 2) = x^2 + 9x + 20 \\
&-(x^3 - 2x^2) \\
&\quad 0 + 9x^2 + 2x \\
&\quad -(9x^2 - 18x) \\
&\qquad 0 + 20x - 40 \\
&\qquad -(20x - 40) \\
&\qquad\quad 0 + 0
\end{aligned}
$$

$0 = x^2 + 9x + 20$

$x_{2/3} = -4{,}5 \pm \sqrt{4{,}5^2 - 20}$

$x_{2/3} = -4{,}5 \pm 0{,}5$

$\underline{x_2 = -5}$

$\underline{\underline{x_3 = -4}}$

---

i) $f(x) = x^3 - x^2 - 1{,}25x + 0{,}75$

1. Nullstelle "raten": Verdacht $x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 1{,}25 \cdot (-1) + 0{,}75$

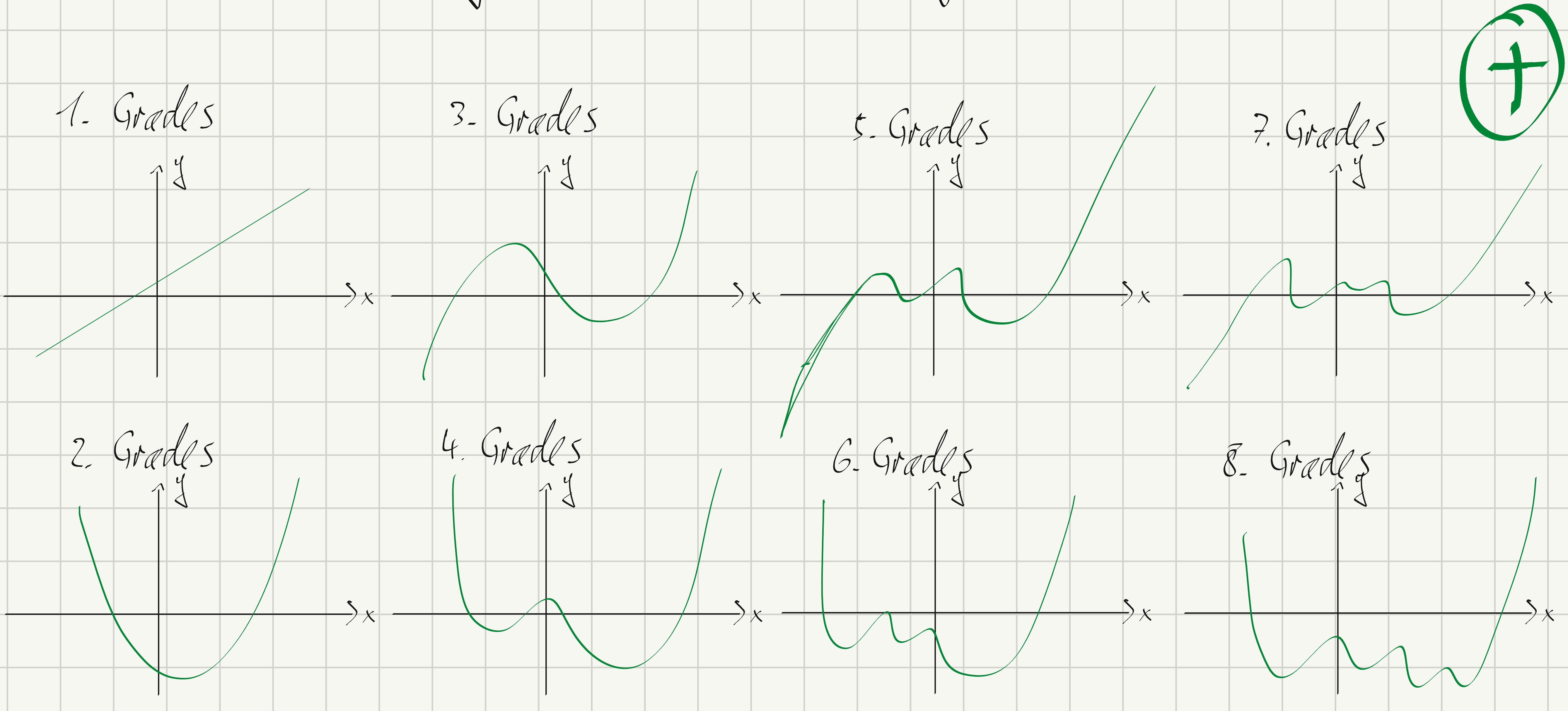
$f(1) = 0$ ✓ $\Rightarrow x_1 = -1$

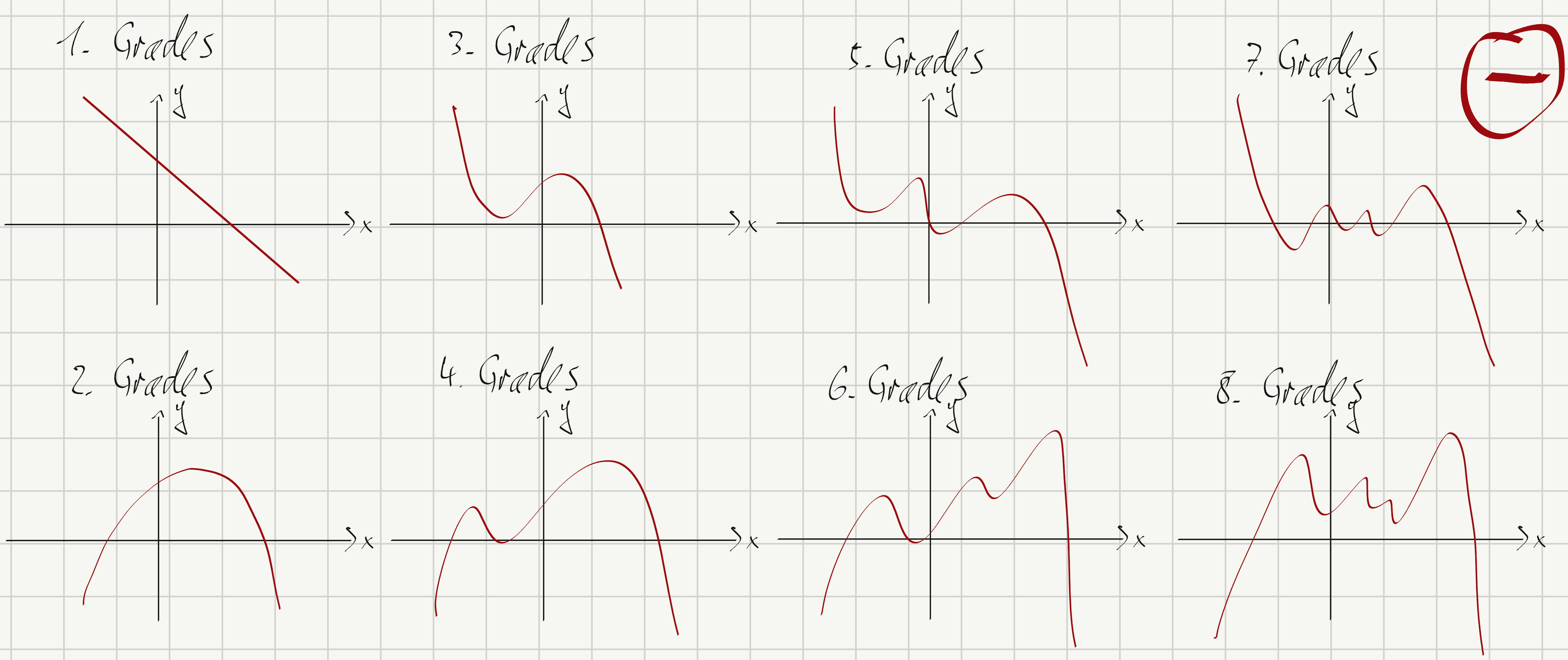
$$
\begin{aligned}
&(x^3 - x^2 - 1{,}25x + 0{,}75) : (x + 1) = x^2 - 2x + 0{,}75 \\
&-(x^3 + x^2) \\
&\quad 0 - 2x^2 - 1{,}25x \\
&\quad -(-2x^2 - 2x) \\
&\qquad 0 + 0{,}75x + 0{,}75 \\
&\qquad -(0{,}75x + 0{,}75) \\
&\qquad\quad 0 + 0
\end{aligned}
$$

BESONDERHEIT!

$$
\begin{aligned}
&(2x^4 + 0{,}5x^3 + 0x^2 - 4x + 6) : (x + 2) = 2x^3 - 5{,}5x^2 \\
&-(2x^4 + 6x^3) \\
&\quad 0 - 5{,}5x^3 + 0x^2 \\
&\quad -(-5{,}5x^3 - 10x^2) \\
&\qquad 0 + 10x^2 - 4x \\
&\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Systematisierung der Grade ganzrationaler Funktionen





Symmetrie bei ganzrat. Funktionen:

1) Achssymmetrie $f(x) = f(-x)$

Liegt immer dann vor, wenn im Funktionsterm ausschließlich gerade Exponenten vorkommen!

am Beispiel: a) $f(x) = -2x^6 + 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 9$

b) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 8$

zu a)

$\boxed{f(x) = f(-x)}$

$-2x^6 + 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 9 = -2\cdot(-x)^6 + 3\cdot(-x)^4 - \frac{1}{2}(-x)^2 - 9$

$-2x^6 + 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 9 = -2\cdot x^6 + 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 9$ ✓ ☺

$\Rightarrow$ Die Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse!

zu b)

$\boxed{f(x) = f(-x)}$

$3x^4 - 2x^3 + 8 = 3\cdot(-x)^4 - 2\cdot(-x)^3 + 8$

$3x^4 - 2x^3 + 8 = 3x^4 + 2x^3 + 8 \quad | -3x^4 \quad | -8$

$-2x^3 = 2x^3$ ↯ $\Rightarrow$ Die Funktion ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse!

---

1) Punktsymmetrie $f(x) = -[f(-x)]$

Liegt immer dann vor, wenn im Funktionsterm ausschließlich ungerade Exponenten vorkommen!

am Beispiel: a) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - \frac{1}{2}x + 9$

b) $f(x) = 3x^7 - 2x^4 - 2x^3$

zu a)

$\boxed{f(x) = -[f(-x)]}$

$\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - \frac{1}{2}x + 9 = -[\frac{1}{2}\cdot(-x)^5 + 2\cdot(-x)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-x) + 9]$

$\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - \frac{1}{2}x + 9 = -[-\frac{1}{2}x^5 - 2x^3 + \frac{1}{2}x + 9]$

$\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - \frac{1}{2}x + 9 = \frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - \frac{1}{2}x - 9$ ✓

$\Rightarrow$ Die Funktion ist punktsymmetrisch zu $Z(0|9)$

zu b)

Aufgaben:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2{,}5x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 1{,}25x + 0{,}75$

I) Berechnen Sie alle Nullstellen

II) Definieren Sie das Verhalten im Unendlichen

III) Untersuchen Sie auf Symmetrie

zu a)

I) $0 = \frac{1}{2}x^4 - 2{,}5x^2 + 2 \quad |\cdot 2$

$0 = x^4 - 5x^2 + 4$

substituiere:

$x^2 = z$

$x^4 = z^2$

$0 = z^2 - 5z + 4$

$z_{1/2} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4}$

$z_{1/2} = 2{,}5 \pm 1{,}5$

$z_1 = 4$

$z_2 = 1$

resubstituiere mit $\boxed{x^2 = z}$

für $z_1 = 4$	für $z_2 = 1$
$x^2 = 4 \quad \mid\sqrt{\ }$	$x^2 = 1 \quad \mid\sqrt{\ }$
$x_1 = 2$	$x_3 = 1$
$x_2 = -2$	$x_4 = -1$

II) $\lim\limits_{x \to -\infty} \Rightarrow f(x) \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \Rightarrow f(x) \to +\infty$

III) (Verdacht auf Achssym., da nur gerade Exponenten)

- Prüfung auf Achssymmetrie:

$f(x) = f(-x)$

$\frac{1}{2}x^4 - 2{,}5x^2 + 2 = \frac{1}{2}\cdot(-x)^4 - 2{,}5\cdot(-x)^2 + 2$

$\frac{1}{2}x^4 - 2{,}5x^2 + 2 = \frac{1}{2}x^4 - 2{,}5x^2 + 2$ ✓

$\Rightarrow$ Diese Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse!

zu b)

I) 1. Nullstelle raten: Verdacht: $x_1 = -1$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 1{,}25 \cdot (-1) + 0{,}75$$
$$f(-1) = 0 \quad \checkmark \quad ☺ \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$$

$$\begin{array}{l} (x^3 - x^2 - 1{,}25x + 0{,}75) : (x+1) = x^2 - 2x + 0{,}75 \\ \underline{-(x^3 + x^2)} \\ \quad 0 - 2x^2 - 1{,}25x \\ \quad \underline{-(-2x^2 - 2x)} \\ \qquad 0 + 0{,}75x + 0{,}75 \\ \qquad \underline{-(0{,}75x + 0{,}75)} \\ \qquad\qquad 0 + 0 \quad \checkmark \end{array}$$

$$0 = x^2 - 2x + 0{,}75$$
$$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 0{,}75}$$
$$x_{2,3} = 1 \pm 0{,}5$$
$$\underline{\underline{x_2 = 1{,}5}}$$
$$\underline{\underline{x_3 = 0{,}5}}$$

II) $\lim\limits_{x \to -\infty} \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \Rightarrow f(x) \to +\infty$

III) Verdacht: Unsymmetrisch

<u>Prüfen auch Achssymmetrie:</u>

$$f(x) = f(-x)$$
$$x^3 - x^2 - 1{,}25x + 0{,}75 = (-x)^3 - (-x)^2 - 1{,}25 \cdot (-x) + 0{,}75$$
$$x^3 - x^2 - 1{,}25x + 0{,}75 = -x^3 - x^2 + 1{,}25x + 0{,}75 \quad | +x^2 / -0{,}75$$
$$x^3 - 1{,}25x = -x^3 + 1{,}25x \quad ↯$$

$\Rightarrow$ Diese Funktion ist <u>nicht</u> achsensymmetrisch!

<u>Prüfen auch Punktsymmetrie:</u>

$$f(x) = -[f(-x)]$$
$$x^3 - x^2 - 1{,}25x + 0{,}75 = -[(-x)^3 - (-x)^2 - 1{,}25 \cdot (-x) + 0{,}75]$$
$$x^3 - x^2 - 1{,}25x + 0{,}75 = -[-x^3 - x^2 + 1{,}25x + 0{,}75]$$
$$x^3 - x^2 - 1{,}25x + 0{,}75 = x^3 + x^2 - 1{,}25x - 0{,}75 \quad | -x^3 / +1{,}25x$$
$$-x^2 + 0{,}75 = x^2 - 0{,}75 \quad ↯$$

$\Rightarrow$ Diese Funktion ist <u>nicht</u> punktsymmetrisch!

$\Rightarrow$ <u>Die Funktion ist demnach asymmetrisch!</u>

DIFFERENZIALRECHNUNG

- Berechnen Sie alle Extrempunkte der Funktion $f(x) = 2x^3 + 0{,}5x^2 - 4x - 2$

- Ableitungen:

$f'(x) = 6x^2 + 1x - 4$

$f''(x) = 12x + 1$

- notwendige Bedingung: $\boxed{f'(x) = 0}$

$0 = 6x^2 + x - 4 \quad | :6$

$0 = x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{4}{6}$

$x_{1/2} = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{4}{6}}$

$x_{1/2} \approx -\frac{1}{12} \pm 0{,}82$

$\underline{x_1 \approx 0{,}74}$

$\underline{\underline{x_2 \approx -0{,}9}}$

- hinreichende Bedingung: $\boxed{f''(x) \neq 0}$

$f''(0{,}74) = 12 \cdot 0{,}74 + 1$

$f''(0{,}74) = 9{,}88 \quad \Rightarrow TP$

$f''(-0{,}9) = 12 \cdot (-0{,}9) + 1$

$f''(-0{,}9) = -9{,}8 \quad \Rightarrow HP$

- f(x) - Werte:

$f(0{,}74) = 2 \cdot 0{,}74^3 + 0{,}5 \cdot 0{,}74^2 - 4 \cdot 0{,}74 - 2$

$f(0{,}74) \approx -3{,}88$

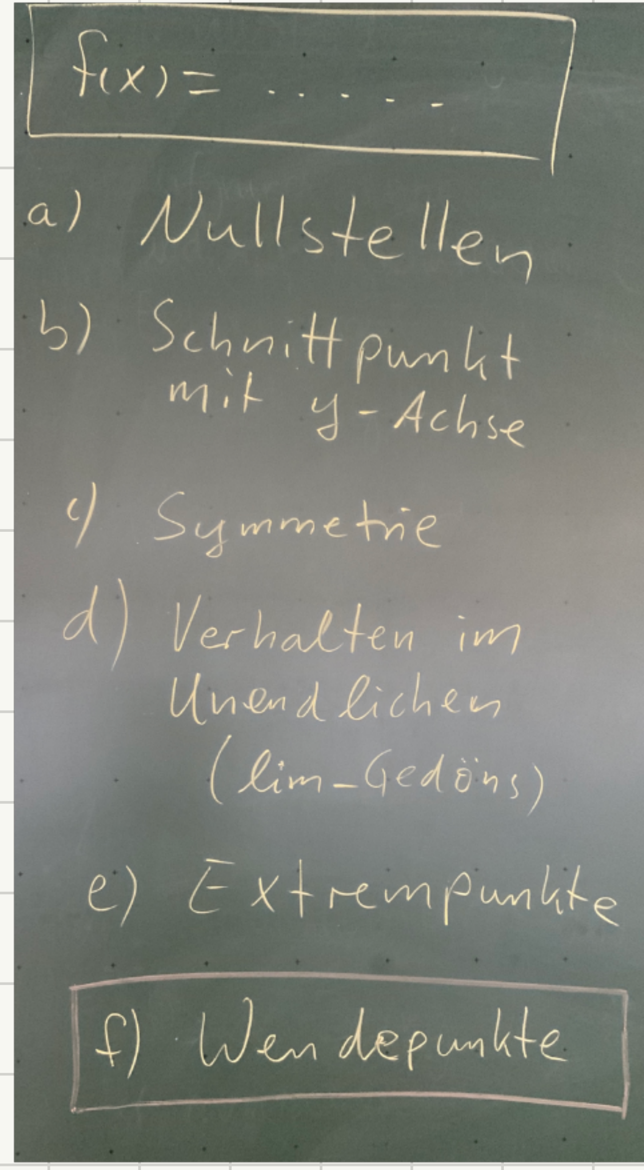
$f(-0{,}9) = 2 \cdot (-0{,}9)^3 + 0{,}5 \cdot (-0{,}9)^2 - 4 \cdot (-0{,}9) - 2$

$f(-0{,}9) = 0{,}547$

$TP(0{,}74 \mid -3{,}88)$

$HP(-0{,}9 \mid 0{,}547)$

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{3}x^4+2x^3-\frac{8}{3}x^2-8x}$$



+ Funktion zeichnen
+ grafisches Ableiten

a)
$$0=\frac{2}{3}x^4+2x^3-\frac{8}{3}x^2-8x$$
$$0=x\cdot\left(\frac{2}{3}x^3+2x^2-\frac{8}{3}x-8\right) \quad \Rightarrow x_1=0$$
$$0=\frac{2}{3}x^3+2x^2-\frac{8}{3}x-8$$

2. Nullstelle raten: Verdacht: $x=2$

$$0=\frac{2}{3}\cdot 2^3+2\cdot 2^2-\frac{8}{3}\cdot 2-8$$
$$0=0 \quad ✓ \quad \Rightarrow x_2=2$$

$$\left(\frac{2}{3}x^3+2x^2-\frac{8}{3}x-8\right):(x-2)=\frac{2}{3}x^2+\frac{10}{3}x+4$$
$$-\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2\right)$$
$$\frac{10}{3}x^2-\frac{8}{3}x$$
$$-\left(\frac{10}{3}x^2-\frac{20}{3}x\right)$$
$$4x-8$$
$$-(4x-8)$$
$$0$$

$$0=\frac{2}{3}x^2+\frac{10}{3}x+4 \quad \Big| :\frac{2}{3}$$
$$0=x^2+5x+6$$
$$x_{3/4}=-2{,}5\pm\sqrt{2{,}5^2-6}$$
$$x_{3/4}=-2{,}5\pm 0{,}5$$
$$x_3=-2$$
$$x_4=-3$$

b)
$$f(0)=\frac{2}{3}\cdot 0^4+2\cdot 0^3-\frac{8}{3}\cdot 0^2-8\cdot 0$$
$$f(0)=0 \qquad S_y(0|0)$$

c) Prüfen auf Achssymmetrie:

$$\boxed{f(x)=f(-x)}$$

$$\frac{2}{3}x^4+2x^3-\frac{8}{3}x^2-8x=\frac{2}{3}\cdot(-x)^4+2(-x)^3-\frac{8}{3}(-x)^2-8\cdot(-x)$$
$$\cancel{\frac{2}{3}x^4}+2x^3\cancel{-\frac{8}{3}x^2}-8x=\cancel{\frac{2}{3}x^4}-2x^3\cancel{-\frac{8}{3}x^2}+8x$$
$$2x^3-8x=-2x^3+8x$$

↯ Diese Funktion ist nicht achsensymmetrisch!

Prüfen auf Punktsymmetrie:

$$\boxed{f(x)=-[f(-x)]}$$

$$\frac{2}{3}x^4+2x^3-\frac{8}{3}x^2-8x=-\left[\frac{2}{3}\cdot(-x)^4+2(-x)^3-\frac{8}{3}(-x)^2-8\cdot(-x)\right]$$
$$\frac{2}{3}x^4+2x^3-\frac{8}{3}x^2-8x=-\left[\frac{2}{3}x^4-2x^3-\frac{8}{3}x^2+8x\right]$$
$$\frac{2}{3}x^4\cancel{+2x^3}-\frac{8}{3}x^2\cancel{-8x}=-\frac{2}{3}x^4\cancel{+2x^3}+\frac{8}{3}x^2\cancel{-8x}$$
$$\frac{2}{3}x^4-\frac{8}{3}x^2=-\frac{2}{3}x^4+\frac{8}{3}x^2$$

↯ Diese Funktion ist nicht punktsymmetrisch!

d)
$$\lim_{x\to-\infty} \Rightarrow f(x)\to+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \Rightarrow f(x)\to+\infty$$

e) • Ableitungen:

$f'(x) = \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{16}{3}x - 8$

$f''(x) = 8x^2 + 12x - \frac{16}{3}$

$f'''(x) = 16x + 12$

• notwendige Bedingung: $\boxed{f'(x) = 0}$

$0 = \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{16}{3}x - 8$

1. Nullstelle raten: Verdacht: $x \approx -0{,}93$

$f(-0{,}93) = \frac{8}{3} \cdot (-0{,}93)^3 + 6 \cdot (-0{,}93)^2 - \frac{16}{3} \cdot (-0{,}93) - 8$

$f(0{,}93) \approx 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -0{,}93$

$\left(\frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{16}{3}x - 8\right) : (x + 0{,}93) = \frac{8}{3}x^2 + \frac{88}{75}x - 8{,}6$

$-\left(\frac{8}{3}x^3 + \frac{62}{25}x^2\right)$

$\frac{88}{75}x^2 - \frac{16}{3}x$

$-\left(\frac{88}{75}x^2 + \frac{2046}{625}x\right)$

$-8{,}6x - 8$

$(-8{,}6x - 8)$

$0 \quad + 0$

$0 = \frac{8}{3}x^2 + \frac{88}{25}x - 8{,}6 \quad \Big| : \frac{8}{3}$

$0 = x^2 + \frac{33}{25}x - \frac{129}{40}$

$x_{2/3} = -\frac{33}{50} \pm \sqrt{\left(\frac{33}{50}\right)^2 + \frac{129}{40}}$

$x_{2/3} \approx -\frac{33}{50} \pm 1{,}91$

$x_2 = 1{,}25$

$x_3 = -2{,}57$

• hinreichende Bedingung: $\boxed{f''(x) \neq 0}$

$f''(-0{,}93) = 8 \cdot (-0{,}93)^2 + 12 \cdot (-0{,}93) - \frac{16}{3}$

$f''(-0{,}93) \approx -9{,}6 \quad \Rightarrow \text{HP}$

$f''(1{,}25) = 8 \cdot 1{,}25^2 + 12 \cdot 1{,}25 - \frac{16}{3}$

$f''(1{,}25) \approx 22{,}17 \quad \Rightarrow \text{TP}$

$f''(-2{,}57) = 8 \cdot (-2{,}57)^2 + 12 \cdot (-2{,}57) - \frac{16}{3}$

$f''(-2{,}57) \approx 16{,}7 \quad \Rightarrow \text{TP}$

• $f(x)$ - Werte:

$f(-0{,}93) = \frac{2}{3}(-0{,}93)^4 + 2\cdot(-0{,}93)^3 - \frac{8}{3}\cdot(-0{,}93)^2 - 8\cdot(-0{,}93)$
$f(-0{,}93) \approx 4{,}02$

$HP(-0{,}93 \mid 4{,}02)$

$f(1{,}25) = \frac{2}{3}\cdot 1{,}25^4 + 2\cdot 1{,}25^3 - \frac{8}{3}\cdot 1{,}25^2 - 8\cdot 1{,}25$
$f(1{,}25) \approx -8{,}63$

$TP_1(1{,}25 \mid -8{,}63)$

$f(-2{,}57) = \frac{2}{3}(-2{,}57)^4 + 2\cdot(-2{,}57)^3 - \frac{8}{3}\cdot(-2{,}57)^2 - 8\cdot(-2{,}57)$
$f(-2{,}57) \approx -1{,}92$

$TP_2(-2{,}57 \mid -1{,}92)$

f) Wendepunkte:

$f''(x) = 8x^2 + 12x - \frac{16}{3}$
$f'''(x) = 16x + 12$

• notwendige Bedingung: $\boxed{f''(x) = 0}$

$0 = 8x^2 + 12x - \frac{16}{3} \quad | :8$
$0 = x^2 + 1{,}5x - \frac{2}{3}$
$x_{1/2} = -0{,}75 \pm \sqrt{0{,}75^2 + \frac{2}{3}}$
$x_{1/2} \approx -0{,}75 \pm 1{,}11$
$x_1 = 0{,}36$
$x_2 = -1{,}86$

• hinreichende Bedingung:

$f'''(0{,}36) = 16\cdot 0{,}36 + 12$
$f'''(0{,}36) = 17{,}76 \quad \Rightarrow \quad WP_{R-L}$

$f'''(-1{,}86) = 16\cdot(-1{,}86) + 12$
$f'''(-1{,}86) = -17{,}76 \quad \Rightarrow \quad WP_{R-L}$

• $f(x)$ - Werte:

$f(0{,}36) = \frac{2}{3}\cdot 0{,}36^4 + 2\cdot 0{,}36^3 - \frac{8}{3}\cdot 0{,}36^2 - 8\cdot 0{,}36$
$f(0{,}36) \approx -3{,}11$

$WP_{R-L}(0{,}36 \mid -3{,}11)$

$f(-1{,}86) = \frac{2}{3}(-1{,}86)^4 + 2\cdot(-1{,}86)^3 - \frac{8}{3}\cdot(-1{,}86)^2 - 8\cdot(-1{,}86)$
$f(-1{,}86) \approx 0{,}771$

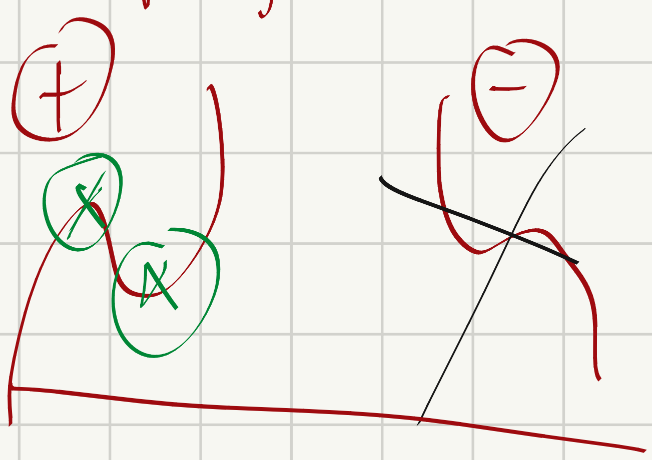
$WP_{L-R}(-1{,}86 \mid 0{,}771)$

- Grad

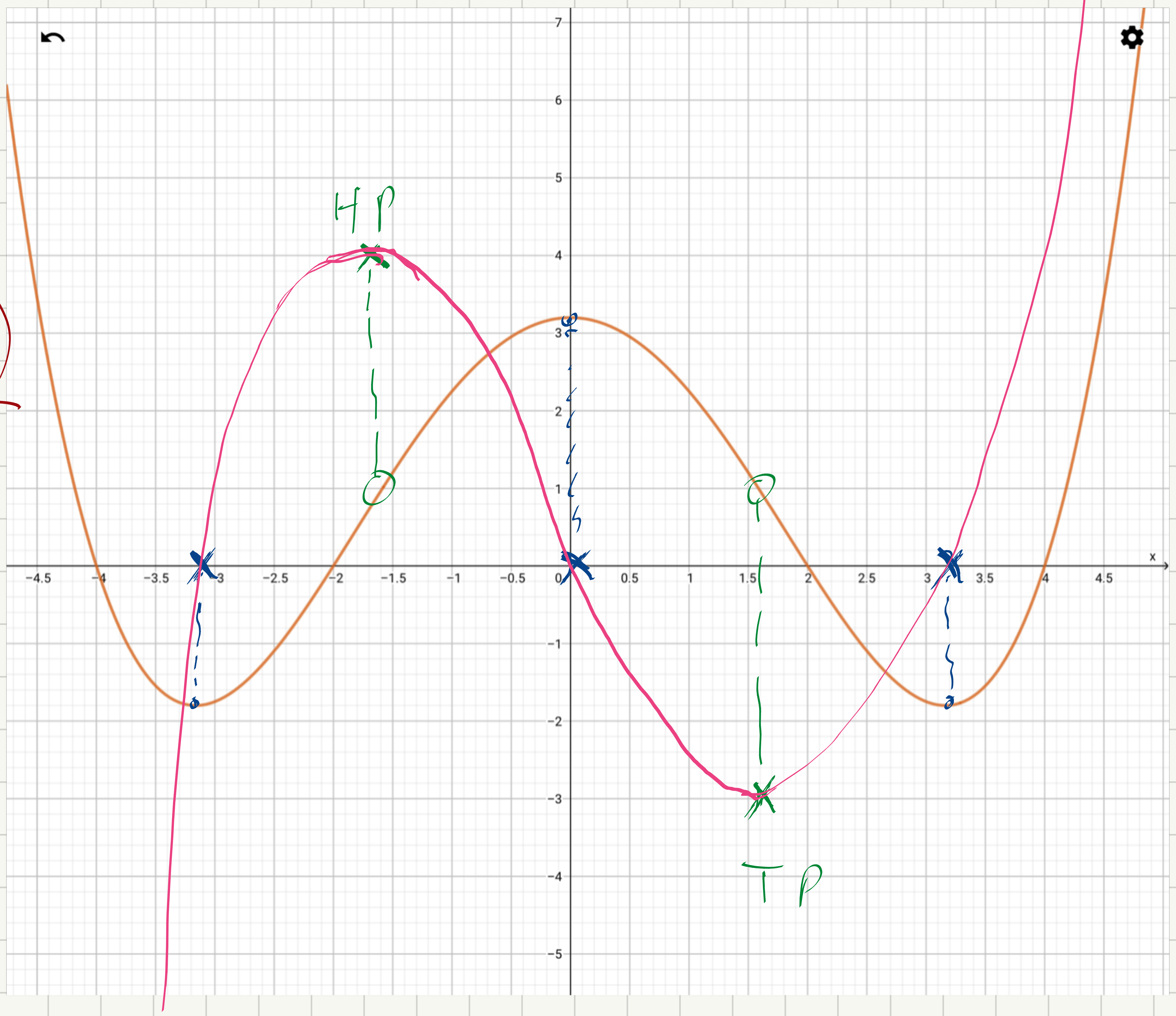
Ausgangsfunkt: 4.

Ableitung: 3.

- genereller Steigungsverlauf



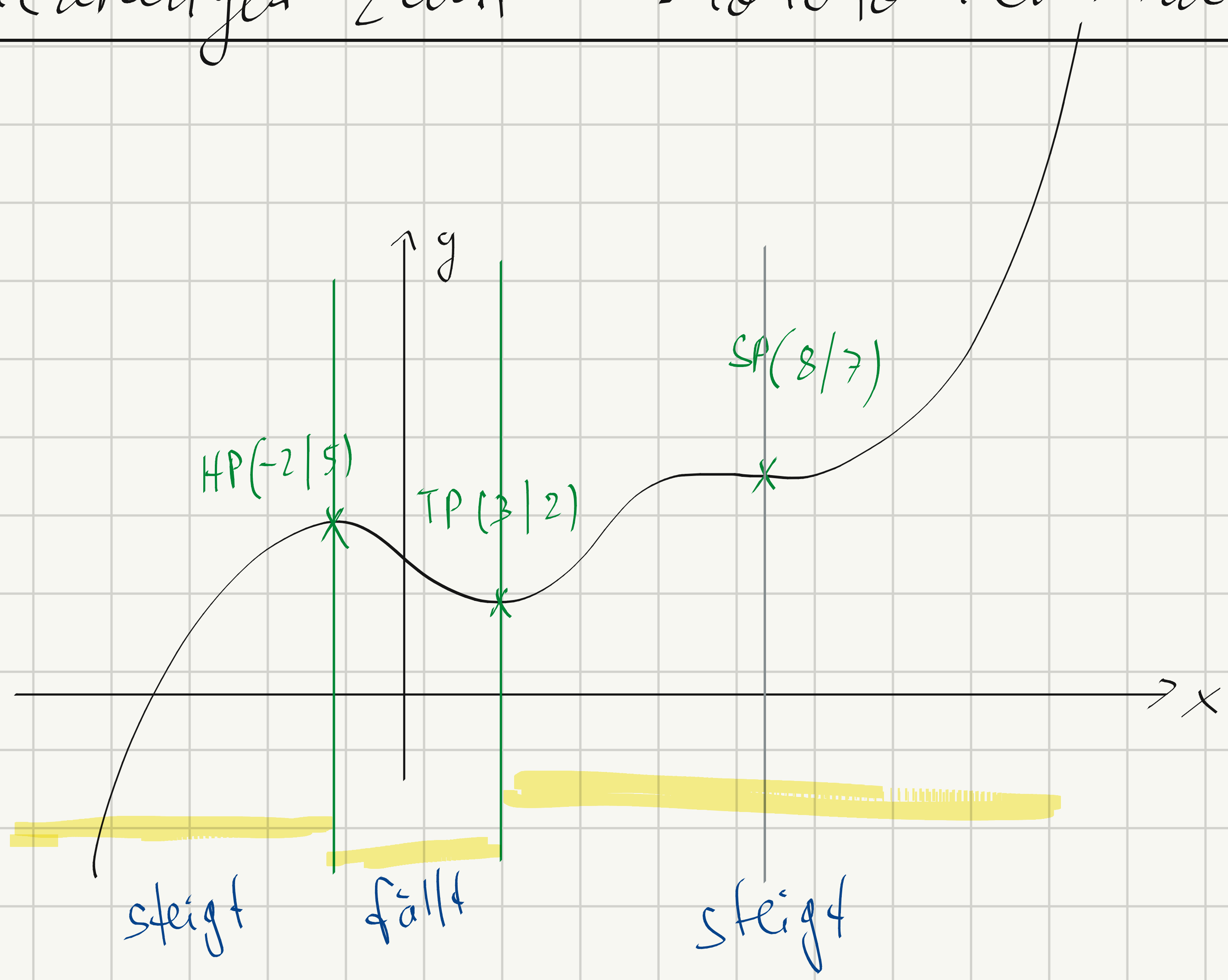
- Extrema
- WPs



Vollständige Kurvendiskussion:

1) Definitions- und Wertebereich
2) Symmetrieeigenschaften
3) Verhalten im Unendlichen
4) Monotonieverhalten
5) Krümmungsverhalten
6) Schnittpunkt mit der y-Achse
7) Nullstellen
8) Ableitungen (die ersten 3)
9) Extrempunkte
10) Wendepunkte
11) Graph

Erklärungen zum Monotonieverhalten:



Monotonieverhalten:

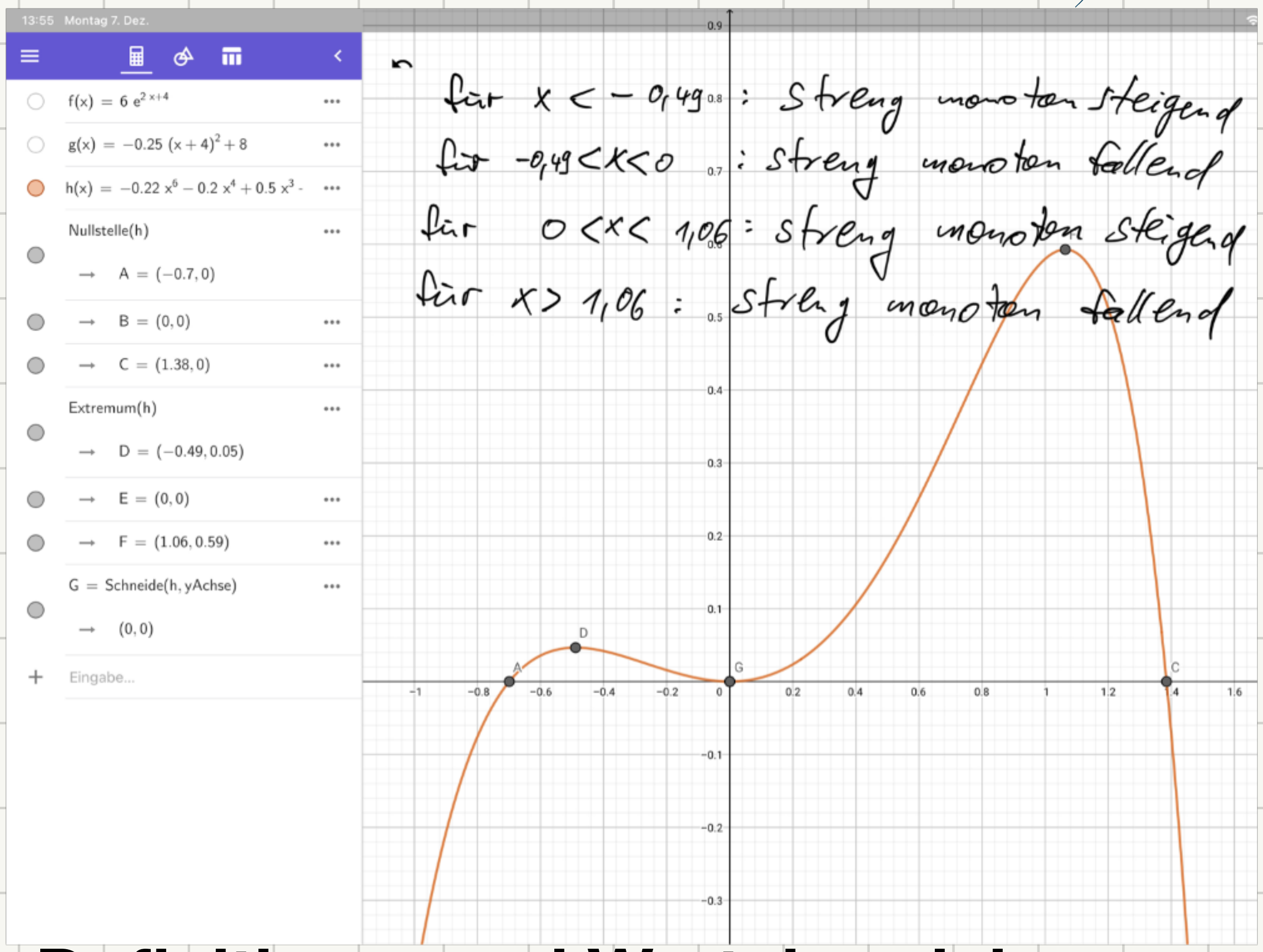
für alle $x < -2$: streng monoton steigend

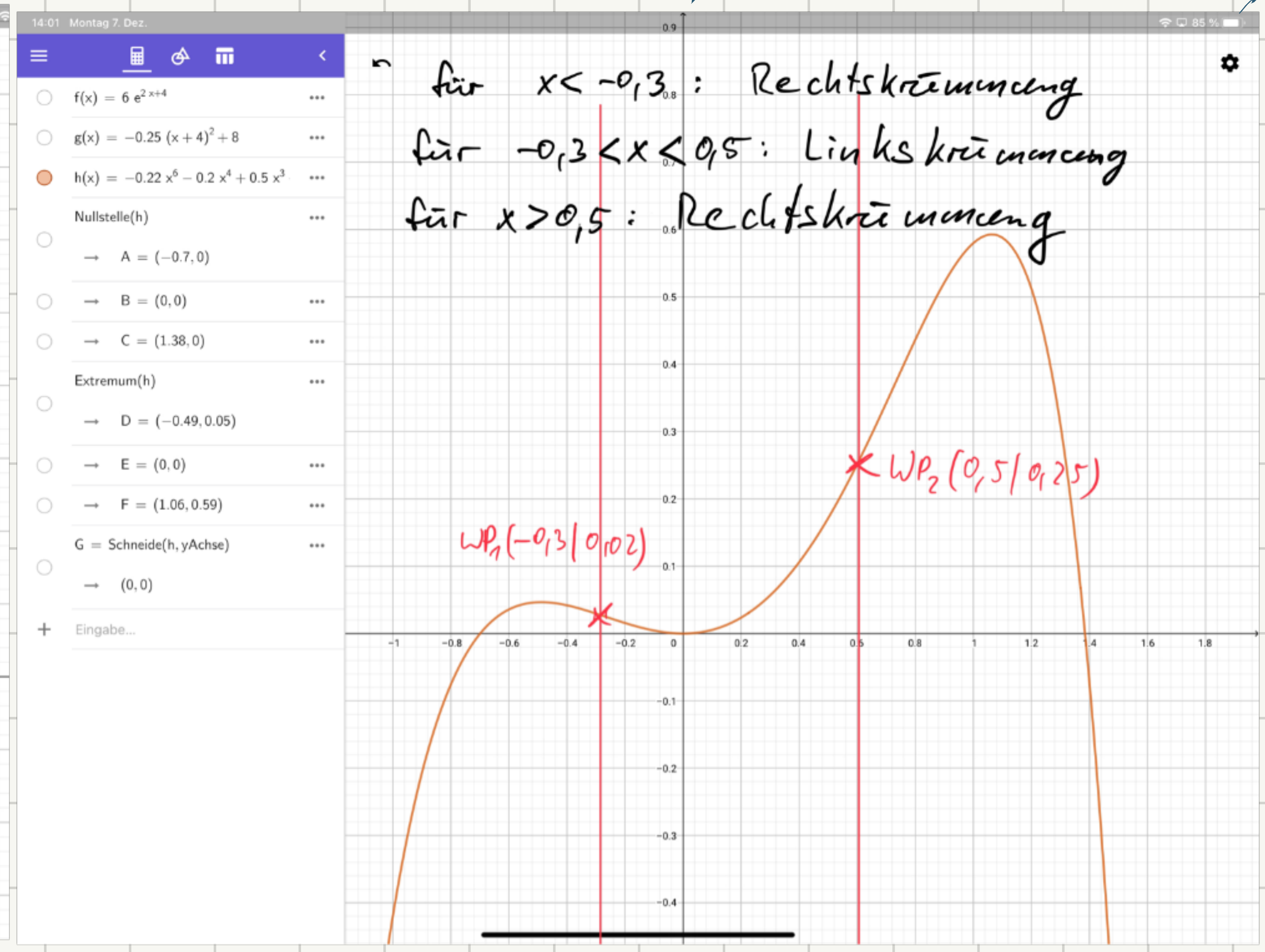
für alle $-2 < x < 3$: streng monoton fallend

für alle $x > 3$: monoton steigend

Monotonieverhalten
(an den Extrempunkten "schneiden")

Krümmungsverhalten
(an den Wendepunkten "schneiden")

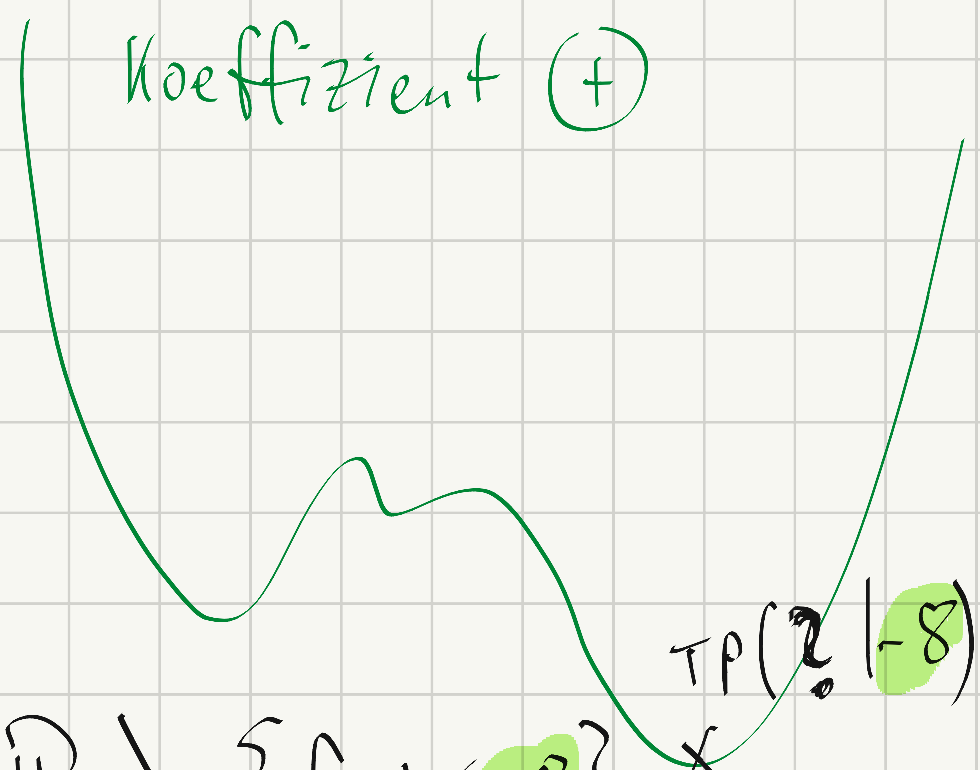




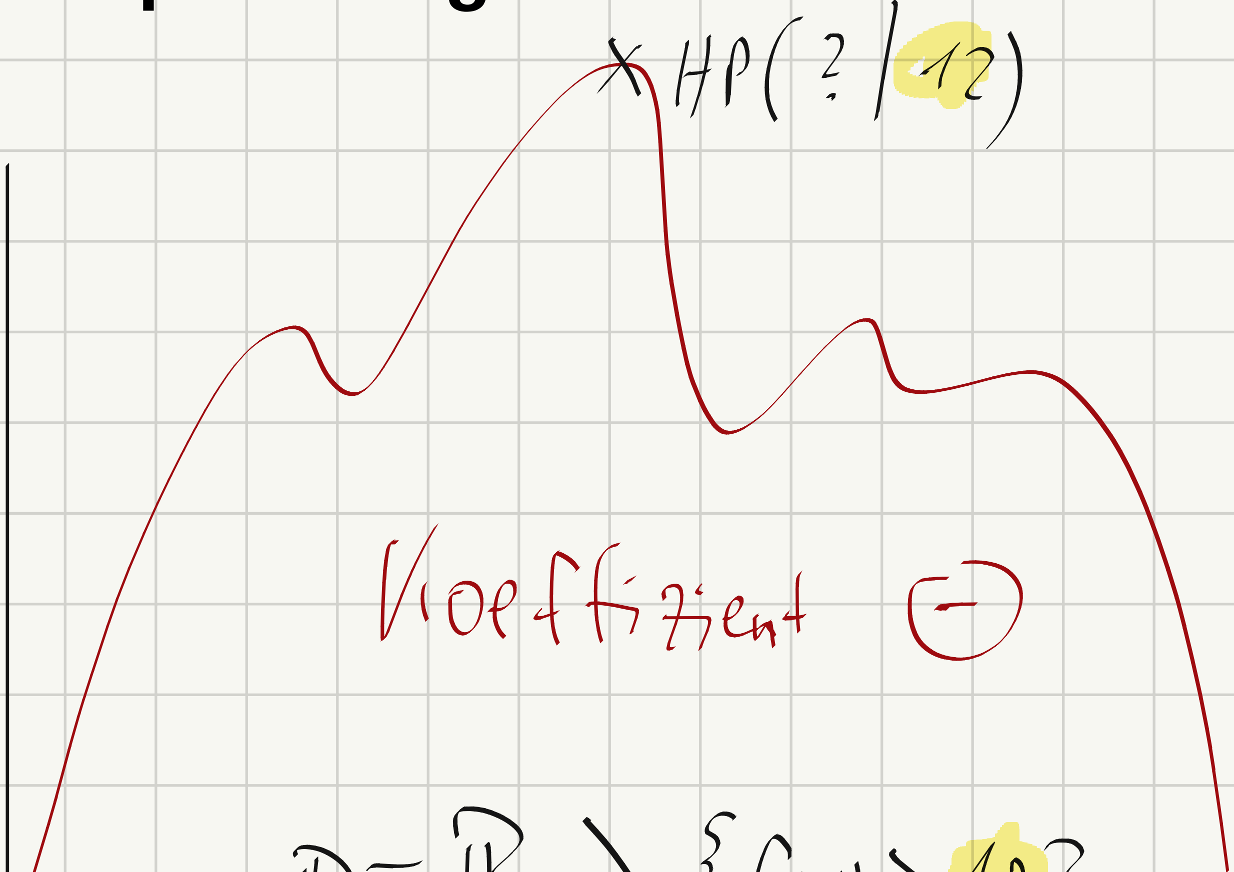
Definitions- und Wertebereich:

Definitionsbereich:
IMMER D=R =) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Wertebereich:
ungerader Funktionsgrad: W=R =) $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
gerader Funktionsgrad:
—> Koeffizient positiv: „Alles wegschneiden, was tiefer als der tiefste Tiefpunkt liegt!"
—> Koeffizient negativ: „Alles wegschneiden, was höher als der höchste Hochpunkt liegt!"



$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{f(x) < -8\}$



$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{f(x) > 12\}$

"Ohne"

Vollständige Kurvendiskussion:

1) Definitions- und Wertebereich
2) Symmetrieeigenschaften
3) Verhalten im Unendlichen
4) Monotonieverhalten
5) Krümmungsverhalten
6) Schnittpunkt mit der y-Achse
7) Nullstellen
8) Ableitungen (die ersten 3)
9) Extrempunkte
10) Wendepunkte
11) Graph

Vollständige Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1$

1) Definitions- & Wertebereich:

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{f(x) > 3\}$

2) Symmetrieverhalten:

$\boxed{\text{Prüfen auf Achssymmetrie: } f(x) = f(-x)}$

$-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1 = -\frac{1}{4}\cdot(-x)^4 + 2\cdot(-x)^2 - 1$

$-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1 = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1$ ✓

$\Rightarrow$ Die Kurve der Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse

3) Verhalten im Unendlichen:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \Rightarrow f(x) \to -\infty$

4) Monotonieverhalten

für $x < -2$: streng monoton steigend

für $-2 < x < 0$: streng monoton fallend

für $0 < x < 2$: streng monoton steigend

für $x > 2$: streng monoton fallend

5) Krümmungsverhalten:

für $x < -1{,}15$: Rechtskrümmung

für $-1{,}15 < x < 1{,}15$: Linkskrümmung

für $x > 1{,}15$: Rechtskrümmung

6) Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = -\frac{1}{4}\cdot 0^4 + 2\cdot 0^2 - 1$$
$$f(0) = -1$$

$\Rightarrow \boxed{S_y(0|-1)}$

7) Nullstellen:

$$0 = -\frac{1}{4}x^4 + 2\cdot x^2 - 1$$

substituiere: $x^2 = z$
$x^4 = z^2$

$$0 = -\frac{1}{4}\cdot z^2 + 2z - 1 \qquad |:(-\tfrac{1}{4})$$

$$0 = z^2 - 8z + 4$$

$$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 4}$$

$$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{12}$$

$z_1 \approx 7{,}46$
$z_2 \approx 0{,}54$

resubstituiere: $\boxed{\text{mit } x^2 = z}$

für $z_1 = 7{,}46$

$x^2 = 7{,}46 \quad |\sqrt{\ }$
$x_1 \approx 2{,}73$
$x_2 \approx -2{,}73$

für $z_2 = 0{,}54$

$x^2 = 0{,}54$
$x_3 \approx 0{,}73$
$x_4 \approx -0{,}73$

$\boxed{\begin{array}{l} N_1(2{,}73|0) \\ N_2(-2{,}73|0) \\ N_3(0{,}73|0) \\ N_4(-0{,}73|0) \end{array}}$

8) Ableitungen:

$f'(x) = -x^3 + 4x$

$f''(x) = -3x^2 + 4$

$f'''(x) = -6x$

9) Extrempunkte:

- notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$0 = -x^3 + 4x$

$0 = x \cdot (-x^2 + 4) \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$

$0 = -x^2 + 4 \quad | + x^2$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$

$\underline{x_2 = 2}$

$\underline{x_3 = -2}$

- hinr. Bed.: $f''(x) \neq 0$

$f''(0) = -3 \cdot 0^2 + 4$

$\underline{f''(0) = 4} \quad \Rightarrow TP$

$f''(2) = -3 \cdot 2^2 + 4$

$\underline{f''(2) = -8} \quad \Rightarrow HP$

$f''(-2) = -3 \cdot (-2)^2 + 4$

$\underline{f''(-2) = -8} \quad \Rightarrow HP$

- f(x)-Werte:

$f(0) = -\frac{1}{4} \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^2 - 1$

$\underline{f(0) = -1}$

$f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 1$

$\underline{f(2) = 3}$

$f(-2) = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^2 - 1$

$\underline{f(-2) = 3}$

$TP(0|-1)$

$HP_1(2|3)$

$HP_2(-2|3)$

10) Wendepunkte:

- notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = -3x^2 + 4 \quad | -4$$
$$-4 = -3x^2 \quad | :(-3)$$
$$\frac{4}{3} = x^2 \quad | \sqrt{}$$
$$1{,}15 \approx x_1$$
$$-1{,}15 \approx x_2$$

- hinr. Bed.: $f'''(x) \neq 0$

$$f'''(1{,}15) = -6 \cdot 1{,}15$$
$$f'''(1{,}15) = -6{,}9 \quad \Rightarrow \quad WP_{L-R}$$

$$f'''(-1{,}15) = -6 \cdot (-1{,}15)$$
$$f'''(-1{,}15) = 6{,}9 \quad \Rightarrow \quad WP_{R-L}$$

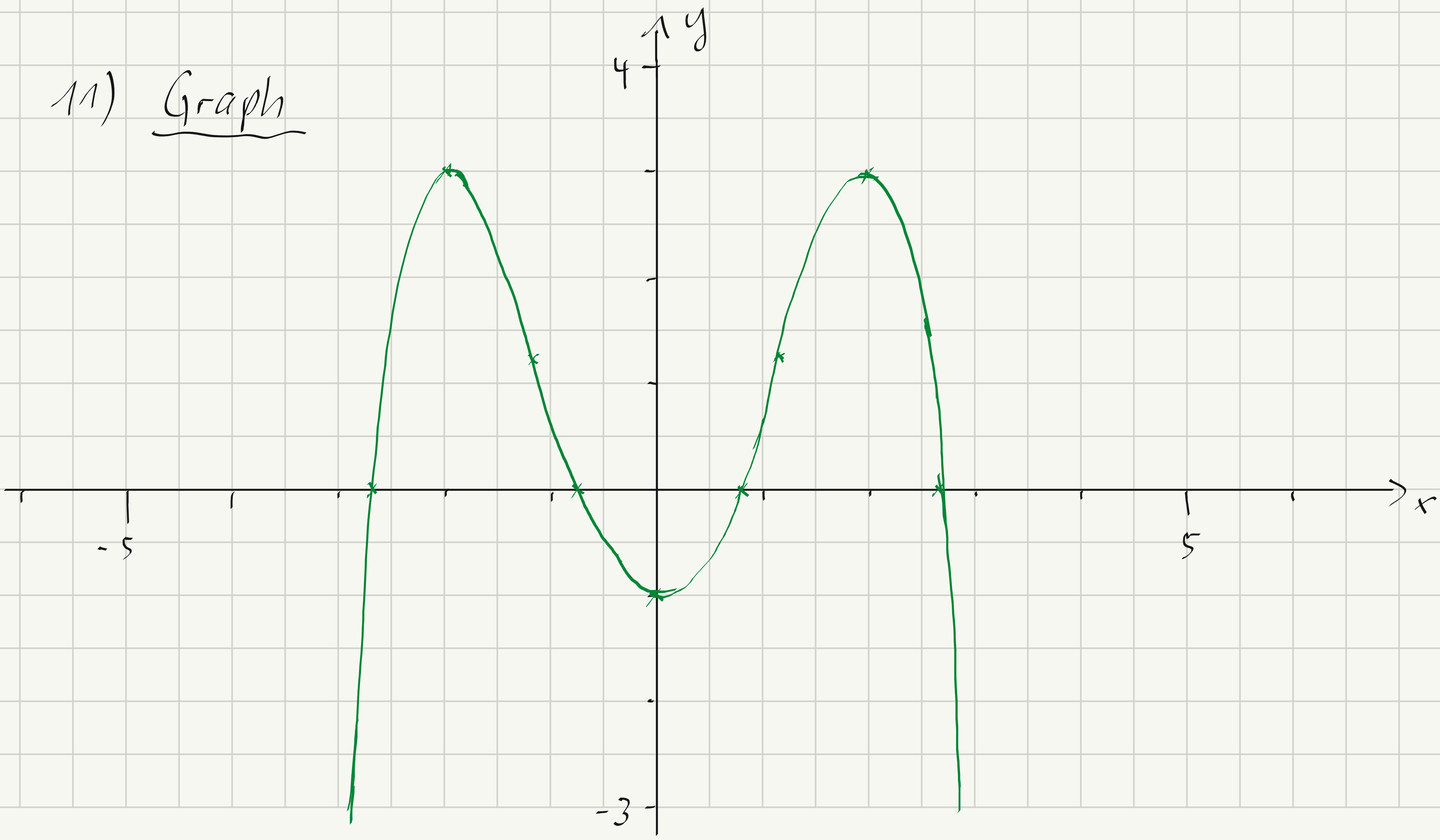
- $f(x)$-Werte

$$f(1{,}15) = -\frac{1}{4} \cdot 1{,}15^4 + 2 \cdot 1{,}15^2 - 1$$
$$f(1{,}15) \approx 1{,}2$$

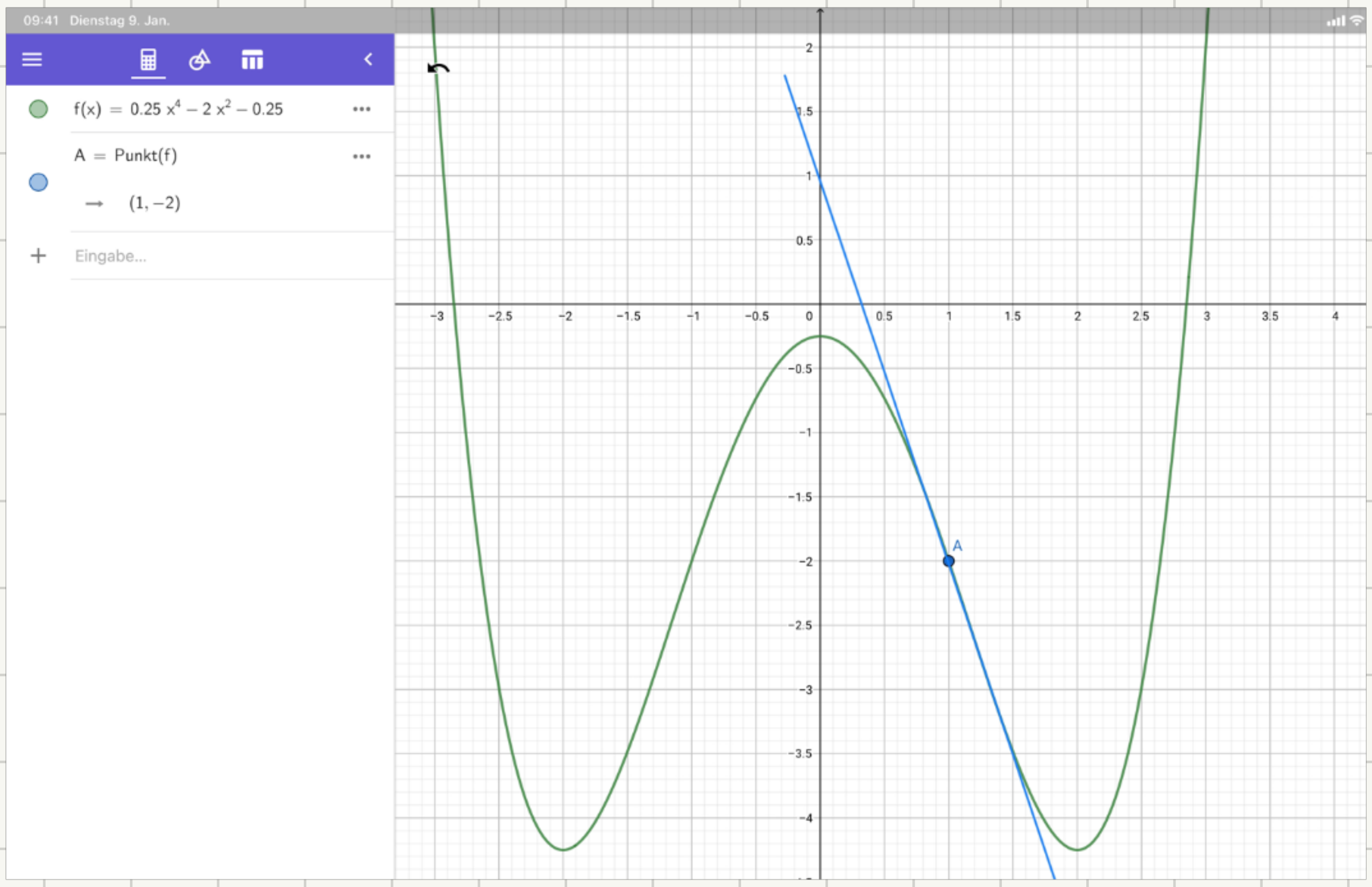
$$f(-1{,}15) = -\frac{1}{4} \cdot (-1{,}15)^4 + 2 \cdot (-1{,}15)^2 - 1$$
$$f(-1{,}15) \approx 1{,}2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} WP_{L-R}(1{,}15 \mid 1{,}2) \\ WP_{R-L}(-1{,}15 \mid 1{,}2) \end{array}}$$

11) Graph



Tangenten- und Normalenberechnung



1) Tangentenberechnung:

- Falls von A nur x-Wert bekannt, Punkt mit Ausgangsfunkt. vervollst.

  $x = 1$ $\quad f(1) = 0{,}25 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1 - 0{,}25$

  $f(1) = -2$

  $A(1|-2)$

- Ableitung von f bauen:

  $f'(x) = x^3 - 4x$

- x-Wert des Tangentialpunkts A in $f'(x)$ einsetzen:

  $f'(1) = 1^3 - 4 \cdot 1$

  $f'(1) = -3$ = Tangente „m"

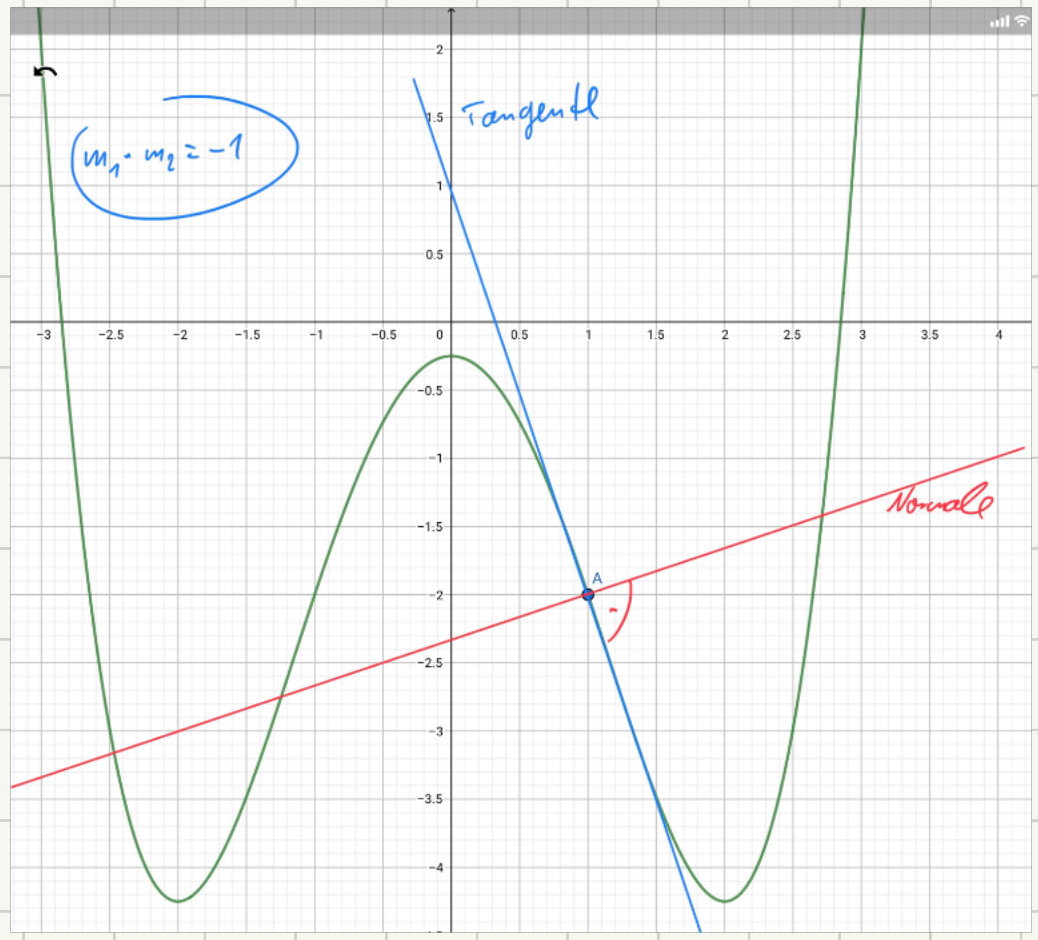
- $\boxed{g(x) = m \cdot x + b}$

  $-2 = \underbrace{-3 \cdot 1}_{A} + b$

  $-2 = -3 + b \quad | +3$

  $1 = b$

  $\boxed{t(x) = -3x + 1}$



1) Tangentenberechnung:

- Falls von A nur x-Wert bekannt, Punkt mit Ausgangsfunkt. vervollst.

  $x = 1$ $\quad f(1) = 0{,}25 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1 - 0{,}25$

  $f(1) = -2$

  $A(1|-2)$

- Ableitung von f bauen:

  $f'(x) = x^3 - 4x$

- x-Wert des Tangentialpunkts A in $f'(x)$ einsetzen:

  $f'(1) = 1^3 - 4 \cdot 1$

  $f'(1) = -3$ = Tangente „m"

- Normalensteigung aus Tangenten-m:

  Orthogonalengesetz: $m_1 \cdot m_2 = -1$

  $-3 \cdot m_2 = -1 \quad | : (-3)$

  Normalensteig. → $m_2 = \frac{1}{3}$

- $\boxed{g(x) = m \cdot x + b}$

  $-2 = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 1}_{A} + b$

  $-2 = \frac{1}{3} + b \quad | -\frac{1}{3}$

  $-2{,}\overline{3} = b$

  $\boxed{n(x) = \frac{1}{3}x - 2{,}\overline{3}}$

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 2x + 9 \\ x = 2 \end{gathered}}$$

$$f(2) = -2\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 9$$

$$f(2) = 5 \qquad T(2|5)$$

$$f'(x) = -6x^2 + 8x - 2$$

$$f'(2) = -6\cdot 2^2 + 8\cdot 2 - 2$$

$$f'(2) = -10 \quad = m$$

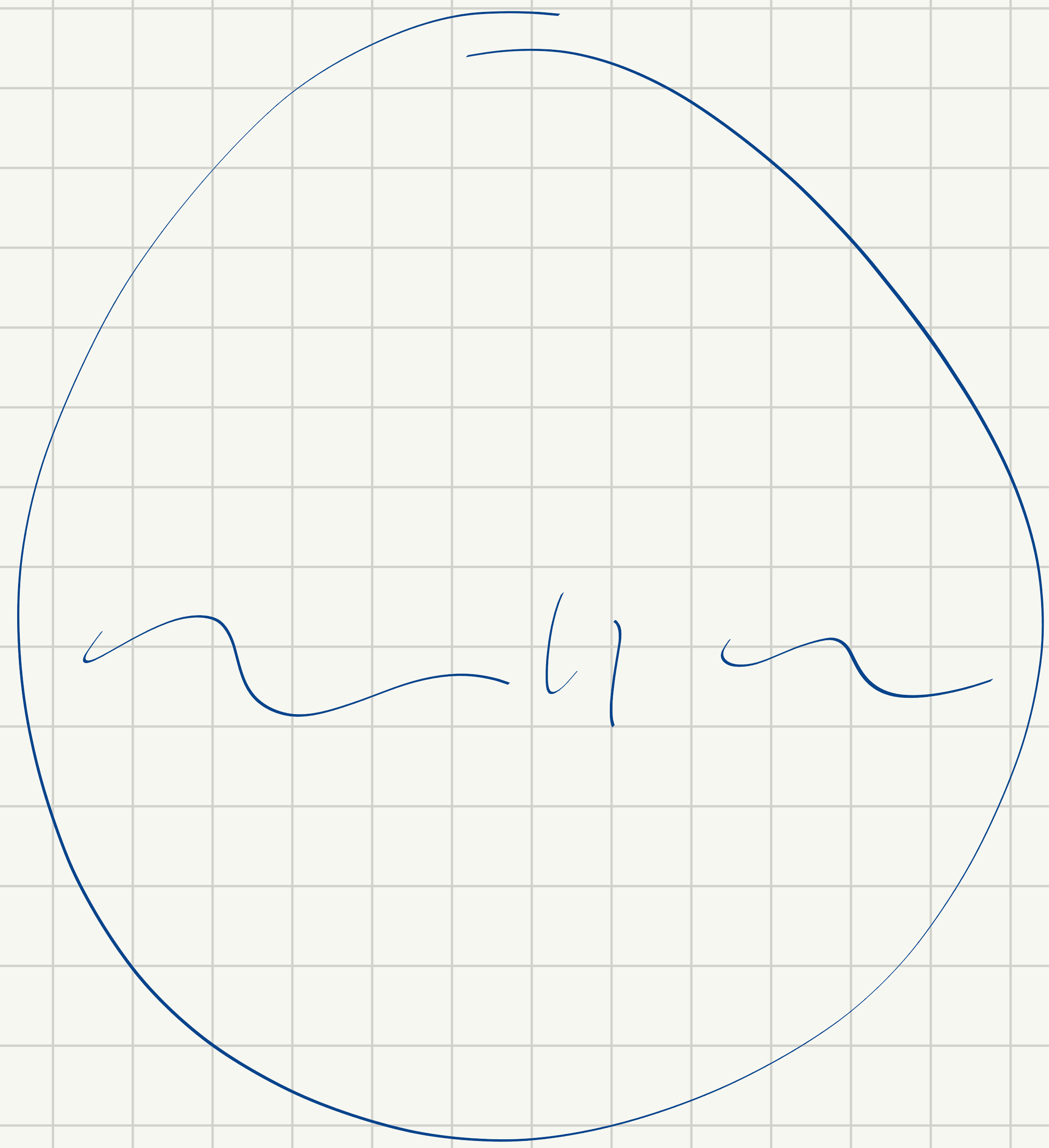
$$\boxed{g(x) = m\cdot x + b}$$

$$5 = -10\cdot 2 + b$$

$$5 = -20 + b \quad |+20$$

$$\underline{25 = b}$$

$$\boxed{t(x) = -10x + 25}$$



$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$-10 \cdot m_2 = -1 \quad |:(-10)$$

$$m_2 = 0{,}1$$

$$5 = 0{,}1 \cdot 2 + b$$

$$5 = 0{,}2 + b \quad |-0{,}2$$

$$4{,}8 = b$$

$$n(x) = 0{,}1x + 4{,}8$$

Übungen:

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 0{,}5x^3 - x^2 + 4x - 6$$

a) Tangente bei $x = 4$

b) Normale bei $x = 1$

---

a) $f(4) = \frac{1}{2}\cdot 4^6 - 3\cdot 4^5 + 2\cdot 4^4 - 0{,}5\cdot 4^3 - 4^2 + 4\cdot 4 - 6$

$f(4) = -550$ $\quad\quad T(4|-550)$

$f'(x) = 3x^5 - 15x^4 + 8x^3 - 1{,}5x^2 - 2x + 4$

$f'(4) = 3\cdot 4^5 - 15\cdot 4^4 + 8\cdot 4^3 - 1{,}5\cdot 4^2 - 2\cdot 4 + 4$

$f'(4) = -284 = m$

$\boxed{g(x) = m\cdot x + b}$

$-550 = -284\cdot 4 + b$

$-550 = -1136 + b \quad | + 1136$

$586 = b$

$\boxed{t(x) = -284x + 586}$

---

b) $f(1) = \frac{1}{2}\cdot 1^6 - 3\cdot 1^5 + 2\cdot 1^4 - 0{,}5\cdot 1^3 - 1^2 + 4\cdot 1 - 6$

$f(1) = -4$

$f'(1) = 3\cdot 1^5 - 15\cdot 1^4 + 8\cdot 1^3 - 1{,}5\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 4$

$f'(1) = -3{,}5$

$m_1 \cdot m_2 = -1$

$-3{,}5 \cdot m_2 = -1 \quad | : (-3{,}5)$

$m_2 = \frac{2}{7}$

$\boxed{g(x) = m\cdot x + b}$

$-4 = \frac{2}{7}\cdot 1 + b \quad | - \frac{2}{7}$

$-\frac{30}{7} = b$

$\boxed{n(x) = \frac{2}{7}x - \frac{30}{7}}$

h-Methode: Oder: "Von der mittleren zur lokalen Änderungsrate"

- Zeigen Sie unter Verwendung grenzwerttechnischer Überlegungen, dass es zur Funktion $f(x) = 3x^2 + 6$ eine 1. Ableitung mit der Funktion $f'(x) = 6x$ existiert.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

$f(x) = 3x^2 + 6$

$f'(x) = 6x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3\cdot(x+h)^2 + 6 - [3x^2 + 6]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3\cdot(x^2 + 2xh + h^2) + 6 - 3x^2 - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3x^2} + 6xh + 3h^2 \cancel{+6} \cancel{-3x^2} \cancel{-6}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(6x + 3h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x + 3\cdot 0$$

$$= \boxed{6x = f'(x)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 6 \\ f'(x) &= 2x^3 - 4x \end{aligned}}$$

1
1 1
1 2 1 $\rightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1 $\rightarrow (a+b)^3 =$
1 4 6 4 1 $\rightarrow (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
1 5 10 10 5 1 $\rightarrow (a+b)^5 =$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(x+h)^4 - 2\cdot(x+h)^2 + 6 - \left[\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 6\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}\cdot(x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4) - 2\cdot(x^2 + 2xh + h^2) + 6 - \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - 6}{h}$$

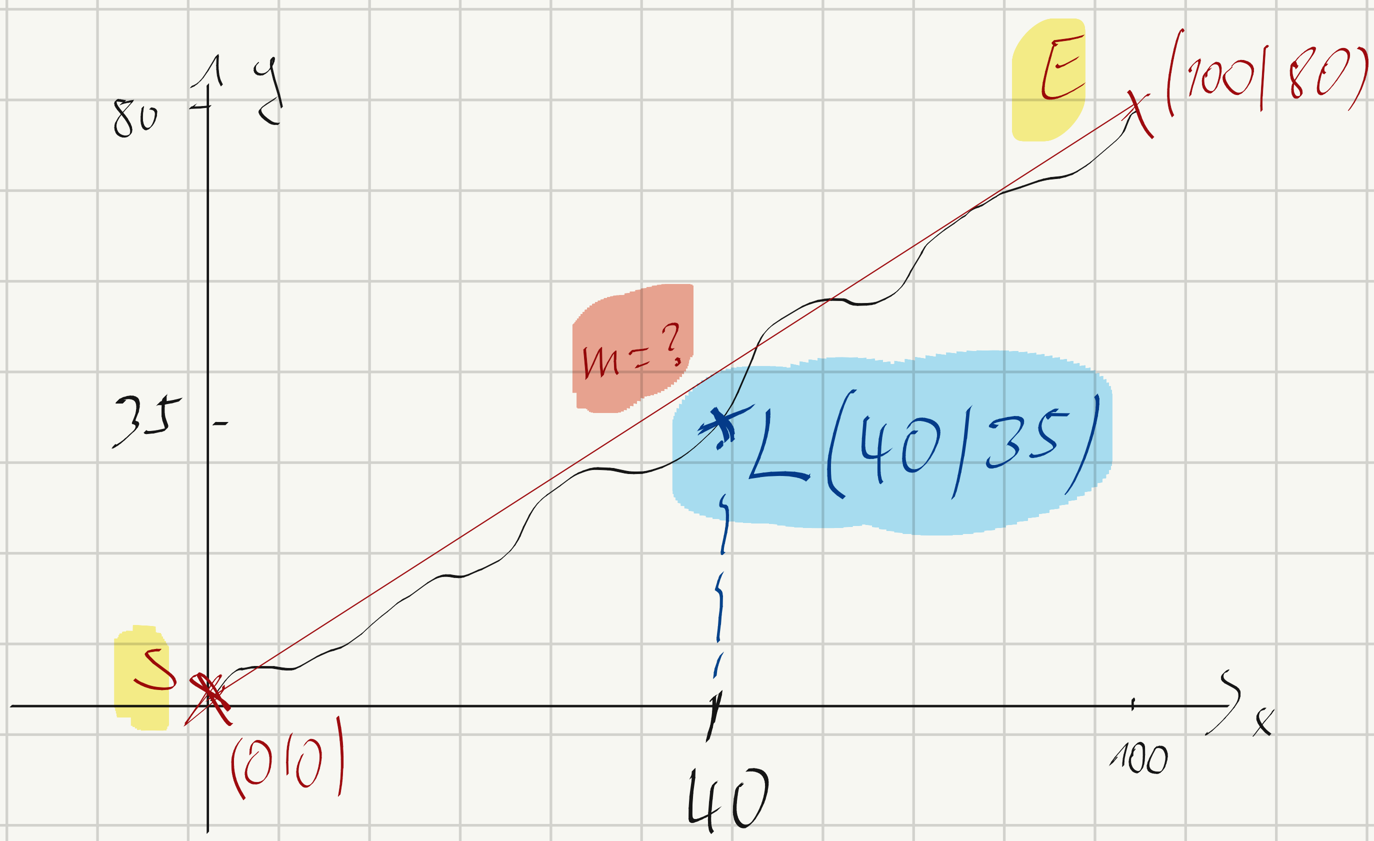
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\frac{1}{2}x^4} + 2x^3h + 3x^2h^2 + 2xh^2 + \frac{1}{2}h^4 \cancel{-2x^2} + 4xh - h^2 \cancel{+6} \cancel{-\frac{1}{2}x^4} \cancel{+2x^2} \cancel{-6}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^3h + 3x^2h^2 + 2xh^2 + \frac{1}{2}h^4 + 4xh - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(2x^3 + 3x^2h + 2xh + \frac{1}{2}h^3 + 4x - h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (2x^3 + 3x^2h + 2xh + \frac{1}{2}h^3 + 4xh - h)$$

$$= 2x^3 + \cancel{3x^2\cdot 0} + \cancel{2x\cdot 0} + \cancel{\frac{1}{2}\cdot 0^3} + 4x \cancel{-0} = \boxed{2x^3 + 4x = f'(x)}$$

MITTLERE VS. LOKALE STEIGUNG:



Für die mittlere Steigung benötigt man IMMER genau ZWEI Punkte. Zwischen diesen wird stets ein LINEARER Verlauf unterstellt. Die Steigung dieser Geraden ist die MITTLERE STEIGUNG, die zwischen den beiden Punkten herrscht.

mittlere Steigung:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{80 - 0}{100 - 0} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

Betrachtet man die lokale Steigung, geht es immer um die Steigung in EINEM GANZ KONKRETEN PUNKT.
Diese kann im Grunde nur mit Hilfe der 1. Ableitung errechnet werden, indem man den x-Wert des betreffenden Punktes in diese einsetzt.

$$m = f'(40) = \ldots = ?$$

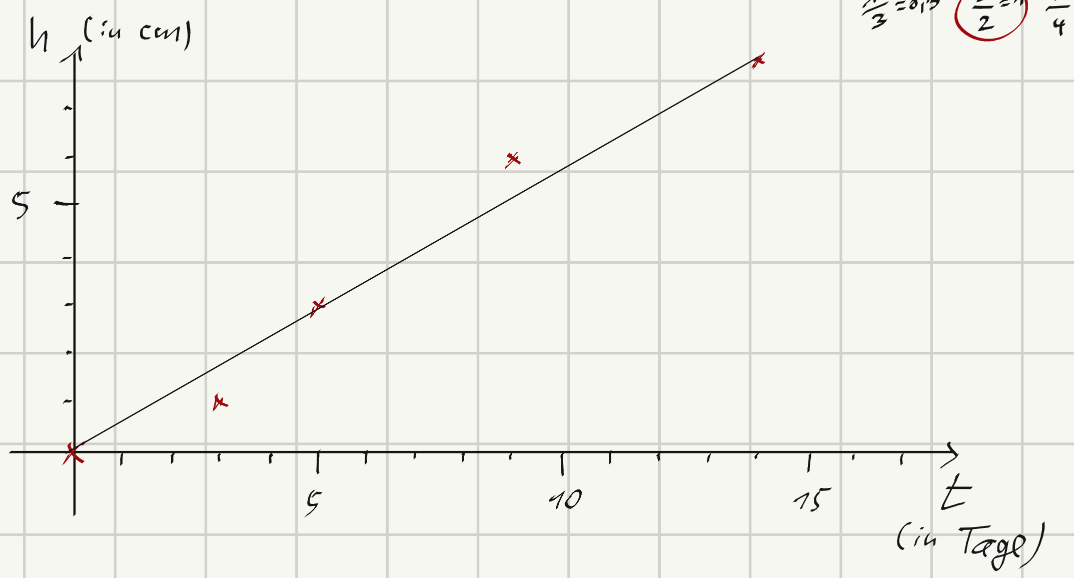
S. 93

4. Das Höhenwachstum einer Tulpe wurde protokolliert.
a) Skizzieren Sie den Graphen der Höhenfunktion h(t).
b) Wie groß ist die mittlere Zuwachsrate der Höhe der Blume während des Beobachtungszeitraums?
c) In welchem der vier Zeitintervalle wuchs die Tulpe am schnellsten?

Zeit t (Tage)	0	3	5	9	14
Höhe h (cm)	0	1	3	6	7

$\frac{1}{3} = 0{,}3$ $\frac{2}{2} = 1$ $\frac{3}{4} = 0{,}75$ $\frac{1}{5} = 0{,}2$

a)



b) $S(0|0)$
$E(14|7)$

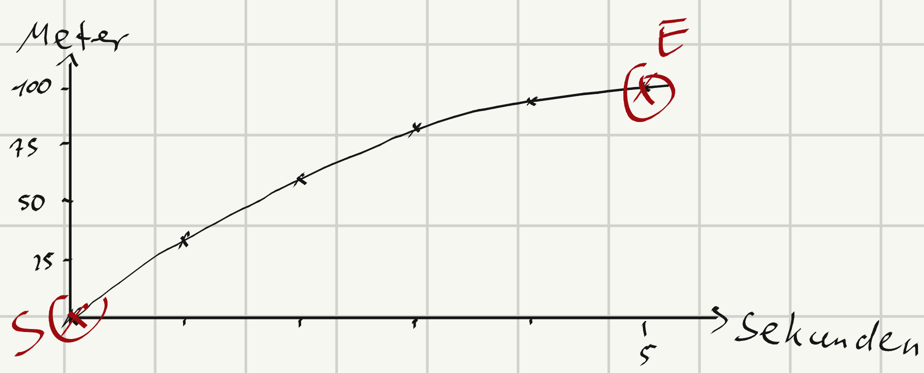
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 0}{14 - 0} = 0{,}5\left(\frac{cm}{d}\right)$$

c) Am schnellsten wächst die Tulpe zwischen dem 3. und dem 5. Tag.

---

7. Ein Auto bremst ab. Der zur Zeit t zurückgelegte Weg ist $s(t) = 40t - 4t^2$ (Zeit t in s, Weg s in m).
a) Skizzieren Sie den Graphen von s für $0 \le t \le 5$.
b) Wann steht das Auto?
c) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des Autos?
d) Bestimmen Sie die Momentangeschwindigkeit des Autos zu Beginn des Bremsmanövers (t = 0) angenähert.

a)



b) Das Auto steht bei einer Geschwindigkeit von $0\frac{m}{s}$

Daher: $\frac{m}{s} = v(t) = s'(t) = 40 - 8t$

$0 = 40 - 8t \quad | +8t$
$8t = 40 \quad | :8$
$t = 5$

Antwort: Das Auto steht nach genau 5 Sekunden.

c) $S(0|0)$
$E(5|100)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 0}{5 - 0} = 20\left(\frac{m}{s}\right) \quad \left[\hat{=}\ 72\ \frac{km}{h}\right]$$

d) $s'(0)$:

nicht gefragt, aber interessant

$s'(0) = 40 - 8 \cdot 0$
$s'(0) = 40\left(\frac{m}{s}\right) \xrightarrow{\cdot 3{,}6} \left[\hat{=}\ 144\ \frac{km}{h}\right]$

Antwort: Ganz zu Beginn des Bremsmanövers ist das Auto $40\frac{m}{s}$ ($\hat{=}\ 144\frac{km}{h}$) schnell.

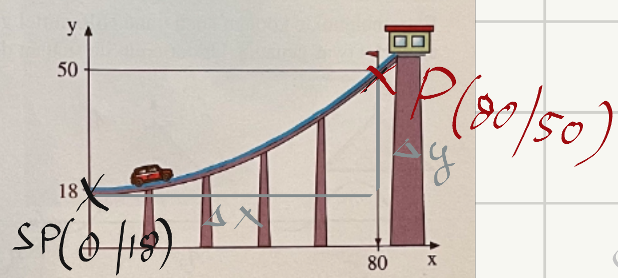
17. Himmelfahrt

1980 baute AUDI das erste Serienfahrzeug der Welt mit Allradantrieb, den Audi quattro. In einem legendären Werbespot fuhr der Audi quattro die Sprungschanze von Kaipola in Finnland hinauf, die Steigungen von über 80% besitzt. 2005 wiederholte Audi das spektakuläre Experiment mit dem A6.

Die Schanze kann durch eine Parabel zweiten Grades modelliert werden. Die Maße kann man der Abbildung entnehmen.
Wichtig: Der Schanzentisch läuft am Absprung horizontal aus.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.
b) Wie groß ist die mittlere Steigung der Schanze im Intervall [0; 80]?
c) Das Fahrzeug schafft maximal einen Anstieg von $\alpha = 40°$. $m = \tan(\alpha)$
Schafft es das Auto bis zur Markierungsfahne?
d) Wie hoch würde ein normales Fahrzeug mit einer Steigfähigkeit von 25% kommen?

$25\% \mathrel{\hat=} m = 0{,}25$



a)

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta x &= 80\\ \Delta y &= 32\end{aligned}}$$

$$|a| = \frac{\Delta y}{(\Delta x)^2} = \frac{32}{80^2} = \frac{1}{200}$$

$$a = \frac{1}{200}$$

$$SP(0|18) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{200}\cdot(x-0)^2 + 18$$

$$f(x) = \frac{1}{200}x^2 + 18$$

b)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{50 - 18}{80 - 0} = \frac{32}{80} = 0{,}4$$

Antwort: Die mittlere Steigung beträgt 0,4 Höhenmeter pro 1 Meter horizontale Entfernung

c)

$$\alpha = 40°$$

$$\boxed{\tan(\alpha) = m}$$

$$\tan(40) \approx 0{,}839$$

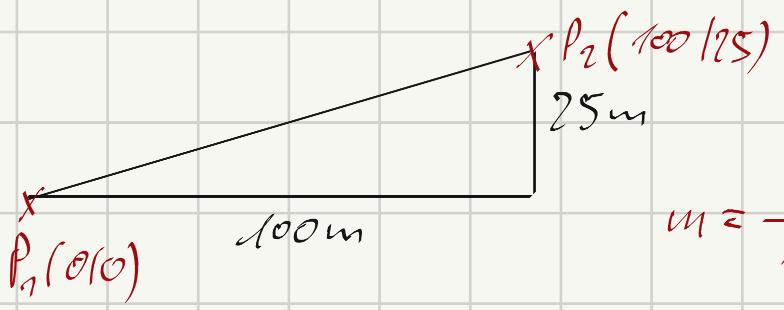
$$f'(x) = \frac{1}{100}x$$

$$0{,}839 = \frac{1}{100}\cdot x \quad \Big| : \frac{1}{100}$$

$$83{,}9 = x$$

Antwort: Ja, das Auto kommt sogar 3,90m weiter

d) 25%



$$m = \frac{25 - 0}{100 - 0} = 0{,}25$$

$$f'(x) = \frac{1}{100}\cdot x$$

$$0{,}25 = \frac{1}{100}\cdot x \quad \Big| : \frac{1}{100}$$

$$25 = x$$

$$f(25) = \frac{1}{200}\cdot 25^2 + 18$$

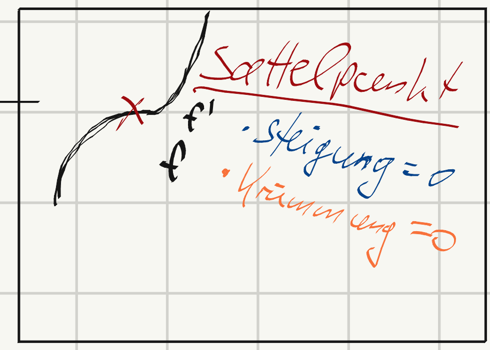
$$f(25) = 21{,}125$$

Antwort: Ein normales Auto kommt nur 21,125 Meter hoch.

REKONSTRUKTION GANZRATIONALER FUNKTIONEN

Der Graph verläuft durch den Punkt P(4/-7)	f(4)=-7 (Triviale Punktinformation)
Der Graph der Funktion berührt die Abszissenachse bei x_a. x-Wert im Aufgabentext $\boxed{\text{z.B.: } x=3}$	x_a ist doppelte Nullstelle **und** Extremstelle $f(x_a) = 0$ (als Nullstelle interpretiert) $f'(x_a) = 0$ (als Extremum ")
Der Funktionsgraph hat bei x_a einen Extrempunkt.	$f'(x_a) = 0$
Der Funktionsgraph hat bei x_a einen Wendepunkt.	$f''(x_a) = 0$
Der Funktionsgraph hat bei x_a einen Sattelpunkt.	$f'(x_a) = 0$ $f''(x_a) = 0$
Der Funktionsgraph hat bei x_a die Steigung 10.	$f'(x_a) = 10$
Der Funktionsgraph hat bei x_a eine Tangente mit der Steigung 10.	$f'(x_a) = 10$
Der Funktionsgraph verläuft bei x_a parallel zur Geraden g: $g(x) = 10x + 6$.	$f'(x_a) = 10$
Der Graph der Funktion verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung.	Die Funktionsgleichung enthält nur ungerade Exponenten.
Der Graph der Funktion verläuft achsensymmetrisch zur Ordinatenachse.	Die Funktionsgleichung enthält nur gerade Exponenten.

Steigung



Aufgaben:

9 **3** Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades der Form $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verläuft durch $P_1(-3/-12)$, durch $P_2(2/8)$ und durch den Ursprung.

2 **4** Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt die Abszissenachse bei $x = 3$ und verläuft durch $P(4/3)$ und $Q(1/4)$.

7 **5** Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat bei $x = 2$ eine Tangente mit der Steigung 38, bei $x = -\frac{1}{9}$ und bei $x = 0$ verlaufen die Tangenten parallel zur Abszissenachse. Die Ordinatenachse wird bei 1 geschnitten.

1 **6** Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat einen Extrempunkt $E(-2/0)$ und einen Wendepunkt $W(-1/-2)$.

10 **7** Der Graph einer zur Ordinatenachse achsensymmetrischen ganzrationalen Funktion 4. Grades verläuft durch den Ursprung und hat einen Hochpunkt $H(2/4)$.

6 **8** Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat im Ursprung einen Sattelpunkt und bei $x = \frac{3}{2}$ einen Extrempunkt. Ferner verläuft er durch $P(1/-1)$.

12 **9** Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist achsensymmetrisch zur Ordinatenachse und schneidet diese bei 4. Die Abszissenachse wird bei $x = 2$ geschnitten. Bei $x = -1$ befindet sich eine Wendestelle.

8 **10** Der Graph einer ganzrationalen Funktion der Form $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$ hat bei $x = 1$ einen Extrempunkt und bei $x = 2$ eine Wendestelle.

4 **11** Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades berührt die Abszissenachse bei $x = 2$ und hat Wendepunkte im Ursprung und bei $x = 1{,}5$. Die Steigung im Ursprung beträgt 1.

5 **12** Der Wendepunkt des Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist $W(\frac{1}{2}/0)$. Die Nullstellen sind $x = -1$ und $x = 2$. Die Ordinatenachse wird in (0/2) geschnitten.

11 **13** Der Graph einer zum Ursprung punktsymmetrischen ganzrationalen Funktion 5. Grades hat den Sattelpunkt $W_S(1/8)$.

3 **14** Der Sattelpunkt des Graphen einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist $W_S(1/0)$, der Hochpunkt $H(-2/4{,}5)$.

Vokabeln:

Abszisse(nache): x-Achse
Ordinate(nachse): y-Achse

Symmetrie:

Achsensymmetrie: AUSSCHLIESSLICH gerade Exponenten

z. B.:

$$f(x) = a_4x^4 + \cancel{a_3x^3} + a_2x^2 + \cancel{a_1x} + a_0$$

$$\hookrightarrow f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$$

Punktsymmetrie: AUSSCHLIESSLICH ungerade Exponenten

z. B.:

$$f(x) = a_5x^5 + \cancel{a_4x^4} + a_3x^3 + \cancel{a_2x^2} + a_1x + a_0$$

$$f(x) = a_5x^5 + a_3x^3 + a_1x + a_0$$

---

6 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat einen Extrempunkt $E(-2/0)$ und einen Wendepunkt $W(-1/-2)$.

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = f(x)$$
$$3\cdot a_3\cdot x^2 + 2\cdot a_2\cdot x + a_1 = f'(x)$$
$$6\cdot a_3\cdot x + 2\cdot a_2 = f''(x)$$

Funktionswert

Bauplan:

$f(-2) = 0$

Steigung $\rightarrow$ $f'(-2) = 0$

$f(-1) = -2$

$f''(-1) = 0$

Krümmung

$$\left|\begin{array}{l} a_3\cdot(-2)^3 + a_2\cdot(-2)^2 + a_1\cdot(-2) + a_0 = 0 \\ 3\cdot a_3\cdot(-2)^2 + 2\cdot a_2\cdot(-2) + a_1 = 0 \\ a_3(-1)^3 + a_2\cdot(-1)^2 + a_1\cdot(-1) + a_0 = -2 \\ 6\cdot a_3\cdot(-1) + 2\cdot a_2 = 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{ccccc} x & y & z & t & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 0 \\ 12a_3 - 4a_2 + 1a_1 + 0 = 0 \\ -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -2 \\ -6a_3 + 2a_2 + 0 + 0 = 0 \end{array}\right|$$

$x = 1 \quad = a_3$

$y = 3 \quad = a_2$

$z = 0 \quad = a_1$

$t = -4 \quad = a_0$

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^2 + 3x^2 \cancel{+0x} - 4}}$$

4 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt die Abszissenachse bei $x = 3$ und verläuft durch $P(4/3)$ und $Q(1/4)$.

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = f(x)$$
$$3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 = f'(x)$$

Bauplan:

$f(3) = 0$
$f'(3) = 0$
$f(4) = 3$
$f(1) = 4$

$$\left|\begin{array}{l} a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 = 0 \\ 3 \cdot a_3 \cdot 3^2 + 2 \cdot a_2 \cdot 3 + a_1 + 0 = 0 \\ a_3 \cdot 4^3 + a_2 \cdot 4^2 + a_1 \cdot 4 + a_0 = 3 \\ a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = 4 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 0 \\ 27a_3 + 6a_2 + 1a_1 + 0 = 0 \\ 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 3 \\ 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4 \end{array}\right|$$

mit WTR:

$a_3 = \frac{2}{3}$
$a_2 = -\frac{11}{3}$
$a_1 = 4$
$a_0 = 3$

$$\underline{f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{3}x^2 + 4x + 3}$$

(14)

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = f(x)$$
$$4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 = f'(x)$$
$$12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2 = f''(x)$$

Bauplan:

Sattelpunkt
$f(1)=0$
$f'(1)=0$
$f''(1)=0$

Hochpunkt
$f(-2)=4{,}5$
$f'(-2)=0$

$$\left|\begin{array}{l} 1a_4 + 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 0 \\ 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + 1a_1 + 0 = 0 \\ 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 + 0 + 0 = 0 \\ 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 4{,}5 \\ -32a_4 + 12a_3 - 4a_2 + 1a_1 + 0 = 0 \end{array}\right|$$

– Zu groß, um es mit dem WTR bestimmen zu können! :-(

↳ keine Lösung

---

(11)

(Gleichungsinformationen)

Bauplan:

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = f(x)$$
$$4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 = f'(x)$$
$$12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2 = f''(x)$$

($f(2)=0$)
$f'(2)=0$
$f(0)=0$
$f''(0)=0$

$f''(1{,}5)=0$

$f'(0)=1$

$$\left|\begin{array}{l} 32a_4 + 12a_3 + 4a_2 + 1a_1 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + 1a_0 = 0 \\ 0 + 0 + 2a_2 + 0 + 0 = 0 \\ 27a_4 + 9a_3 + 3a_2 + 0 + 0 = 0 \\ 0a_4 + 0a_3 + 0a_2 + 1a_1 + 0a_0 = 1 \end{array}\right|$$

– Zu groß, um es mit dem WTR bestimmen zu können! :-(

↳ keine Lösung

(12)

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$
$$f''(x) = 6a_3x + 2a_2$$

$\cancel{f(\tfrac{1}{2})=0}$

$f''(\frac{1}{2})=0$	$6\cdot a_3\cdot(\frac{1}{2}) + 2a_2 + 0 + 0 = 0$	$\Leftrightarrow$	$3a_3 + 2a_2 + 0 + 0 = 0$
$f(-1)=0$	$a_3\cdot(-1)^3 + a_2\cdot(-1)^2 + a_1\cdot(-1) + a_0 = 0$		$-a_3 + a_2 - a_1 + 1a_0 = 0$
$f(2)=0$	$a_3\cdot 2^3 + a_2\cdot 2^2 + a_1\cdot 2 + a_0 = 0$		$8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$
$f(0)=2$	$a_3\cdot 0^3 + a_2\cdot 0^2 + a_1\cdot 0 + a_0 = 2$		$0 + 0 + 0 + 1a_0 = 2$

überbestimmt! Eine Info streichen!

mit dem WTR:

$x = a_3 = 2$
$y = a_2 = -3$
$z = a_1 = -3$
$t = a_0 = 2$

$\Rightarrow$ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

---

(8) 4. Grades

im Ursprung (0|0) einen Sattelpunkt
bei $x = \frac{3}{2}$ Extrempunkt
P (1|-1)

Aufg. (8)

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$f'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$
$$f''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$$

Bauplan:

Sp	$f(0)=0$	$0 + 0 + 0 + 0 + a_0 = 0$	$\Rightarrow \boxed{a_0=0}$
	$f'(0)=0$	$0 + 0 + 0 + a_1 = 0$	$\Rightarrow \boxed{a_1=0}$
	$f''(0)=0$	$0 + 0 + 2a_2 = 0$	$\Rightarrow 2a_2 = 0 \mid :2$ $\boxed{a_2=0}$
Extr.	$f'(\frac{3}{2})=0$	$4\cdot a_4\cdot(\frac{3}{2})^3 + 3a_3\cdot(\frac{3}{2})^2 + 2a_2\cdot(\frac{3}{2}) + a_1 = 0$	
P	$f(1)=-1$	$a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -1$	

$$\left|\begin{array}{l} 13{,}5a_4 + 6{,}75a_3 = 0 \\ a_4 + a_3 = -1 \end{array}\right| \cdot(-6{,}75)$$

$$\oplus\left|\begin{array}{l} 13{,}5a_4 + 6{,}75a_3 = 0 \\ -6{,}75a_4 - 6{,}75a_3 = 6{,}75 \end{array}\right|$$

$6{,}75a_4 = 6{,}75 \quad | : 6{,}75$
$a_4 = 1$

mit $\boxed{a_4 + a_3 = -1}$ und $\boxed{a_4 = 1}$: $1 + a_3 = -1 \quad | -1$
$a_3 = -2$

$\boxed{f(x) = x^4 - 2x^3}$

---

(5) 3. Grades ✓

bei $x=2$ Tangente mit $m = 38$ ✓
bei $x = -\frac{1}{9}$ und $x = 0$ Tangenten parallel zur x-Achse ($m=0$)
bei 1 Schnittp. mit y-Achse
$S_y(0|1)$

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

Bauplan:

$f'(2)=38$	$3\cdot a_3\cdot 2^2 + 2\cdot a_2\cdot 2 + a_1 = 38$	
$f'(-\frac{1}{9})=0$	$3\cdot a_3\cdot(-\frac{1}{9})^2 + 2\cdot a_2\cdot(-\frac{1}{9}) + a_1 = 0$	
$f'(0)=0$	$0 + 0 + a_1 = 0$	$\Rightarrow$
$f(0)=1$	$0 + 0 + 0 + a_0 = 1$	$\Rightarrow$

$\boxed{a_1 = 0, \; a_0 = 1}$

$$\left|\begin{array}{l} 12a_3 + 4a_2 = 38 \\ \frac{1}{27}a_3 - \frac{2}{9}a_2 = 0 \end{array}\right| \cdot 18$$

$$\oplus\left|\begin{array}{l} 12a_3 + 4a_2 = 38 \\ \frac{2}{3}a_3 - 4a_2 = 0 \end{array}\right|$$

$\frac{38}{3}a_3 = 38 \quad | : \frac{38}{3}$
$a_3 = 3$

mit $\boxed{12a_3 + 4a_2 = 38}$ und $\boxed{a_3 = 3}$

$12\cdot 3 + 4a_2 = 38$
$36 + 4a_2 = 38 \quad | -36$
$4a_2 = 2 \quad | :4$
$a_2 = 0{,}5$

$\boxed{f(x) = 3x^3 + 0{,}5x^2 + 1}$

(10)

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6x + 2b$$

$$\begin{array}{l} f'(1)=0 \\ f''(2)=0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 3\cdot 1^2 + 2\cdot b\cdot 1 + c = 0 \\ 6\cdot 2 + 2b = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3 + 2b + c = 0 \\ 12 + 2b = 0 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$12 + 2b = 0 \quad | -12$$
$$2b = -12 \quad | :2$$
$$b = -6$$

$$3 + 2b + c = 0$$
$$3 + 2\cdot(-6) + c = 0$$
$$3 - 12 + c = 0$$
$$-9 + c = 0 \quad | +9$$
$$\underline{\underline{c = 9}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}}$$

(3)

3 Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades der Form $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verläuft durch $P_1(-3/-12)$, durch $P_2(2/8)$ und durch den Ursprung. $P(0/0)$

$P_1(-3|-12)$
$P_2(2|8)$
$P_3(0|0)$

$$\boxed{f(x) = x^3 + a\cdot x^2 + b x + c}$$

$$\left| \begin{array}{ll} (-3)^3 + a\cdot(-3)^2 + b\cdot(-3) + c & = -12 \\ 2^3 + a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c & = 8 \\ 0^3 + a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c & = 0 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} -27 + 9\cdot a - 3b + c = -12 \\ 8 + 4a + 2b + c = 8 \\ 0 + 0 + 0 + c = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} +27 \\ -8 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad x \quad\;\; y \quad\; z \\ \left| \begin{array}{l} 9a - 3b + 1c = 15 \\ 4a + 2b + 1c = 0 \\ 0 + 0 + 1c = 0 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = a = 1 \\ y = b = -2 \\ z = c = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = x^3 + x^2 - 2x}}$$

✓ 4. Grades
✓ achsensymmetrisch ☺
✓ verläuft durch ~~Ursprung~~ (0|0)
HP (2|4)

Aufg. 7

$f(x) = a_4x^4 + \cancel{a_3x^3} + a_2\cdot x^2 + \cancel{a_1x} + a_0$
$f'(x) = 4a_4x^3 + 2a_2x$

Bauplan:

$$\begin{array}{l|l|}
1)\ f(0)=0 & a_4\cdot 0^4 + a_2\cdot 0^2 + a_0 = 0 \\
2)\ f(2)=4 & a_4\cdot 2^4 + a_2\cdot 2^2 + a_0 = 4 \\
3)\ f'(2)=0 & 4a_4\cdot 2^3 + 2a_2\cdot 2 + 0 = 0
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 0 + 0 + 1a_0 = 0 \\ 16a_4 + 4a_2 + 1a_0 = 4 \\ 32a_4 + 4a_2 + 0 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\left|\begin{array}{l} 16a_4 + 4a_2 + 1\cdot 0 = 4 \\ 32a_4 + 4a_2 + 0 = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 16a_4 + 4a_2 = 4 \\ 32a_4 + 4a_2 = 0 \end{array}\right| \cdot(-1)$$

$$\oplus \left|\begin{array}{l} -16a_4 - 4a_2 = -4 \\ 32a_4 + 4a_2 = 0 \end{array}\right|$$

$16a_4 = -4 \quad |:16$
$a_4 = -\frac{1}{4}$

mit $\boxed{16a_4 + 4a_2 = 4}$ und $\boxed{a_4 = -\frac{1}{4}}$:

$16\cdot(-\frac{1}{4}) + 4a_2 = 4$
$-4 + 4a_2 = 4 \quad |+4$
$4a_2 = 8 \quad |:4$
$a_2 = 2$

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 0}$$

(13)
• punktsym. zum Ursprung
• 5. Grades
• S(1|8) ← Sattelpunkt

$a_0=0$

$f(x) = a_5x^5 + \cancel{a_4x^4} + a_3x^3 + \cancel{a_2x^2} + a_1x + \cancel{a_0}$

Bauplan:
1) $f(1)=8$
2) $f'(1)=0$
3) $f''(1)=0$

$f(x) = a_5x^5 + a_3x^3 + a_1x$
$f'(x) = 5a_5x^4 + 3a_3x^2 + a_1$
$f''(x) = 20a_5x^3 + 6a_3x$

$$\left|\begin{array}{l} a_5\cdot 1^5 + a_3\cdot 1^3 + a_1\cdot 1 = 8 \\ 5a_5\cdot 1^4 + 3a_3\cdot 1^2 + a_1 = 0 \\ 20a_5\cdot 1^3 + 6a_3\cdot 1 + 0 = 0 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} a_5 + a_3 + a_1 = 8 \\ 5a_5 + 3a_3 + a_1 = 0 \\ 20a_5 + 6a_3 + 0 = 0 \end{array}\right| \cdot(-1)$$

$$\left|\begin{array}{l} -a_5 - a_3 - a_1 = -8 \\ 5a_5 + 3a_3 + a_1 = 0 \\ 20a_5 + 6a_3 + 0 = 0 \end{array}\right| \xrightarrow{+} \left|\begin{array}{l} 4a_5 + 2a_3 = -8 \\ 20a_5 + 6a_3 = 0 \end{array}\right| \cdot(-3)$$

$$\oplus \left|\begin{array}{l} -12a_5 - 6a_3 = 24 \\ 20a_5 + 6a_3 = 0 \end{array}\right|$$

$8a_5 = 24 \quad |:8$
$a_5 = 3$

mit $\boxed{4a_5 + 2a_3 = -8}$ und $\boxed{a_5 = 3}$

$4\cdot 3 + 2a_3 = -8$
$12 + 2a_3 = -8 \quad |-12$
$2a_3 = -20 \quad |:2$
$a_3 = -10$

mit $\boxed{a_5 + a_3 + a_1 = 8}$ und $\boxed{a_5 = 3}$ und $\boxed{a_3 = -10}$

$3 + (-10) + a_1 = 8$
$-7 + a_1 = 8 \quad |+7$
$a_1 = 15$

$$\boxed{f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x}$$

(9) $f(x) = a_4x^4 + \cancel{a_3x^3} + a_2x^2 + \cancel{a_1x} + a_0$

wg. Symmetrie:

$f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$
$f'(x) = 4a_4x^3 + 2a_2x$
$f''(x) = 12x_4x^2 + 2a_2$

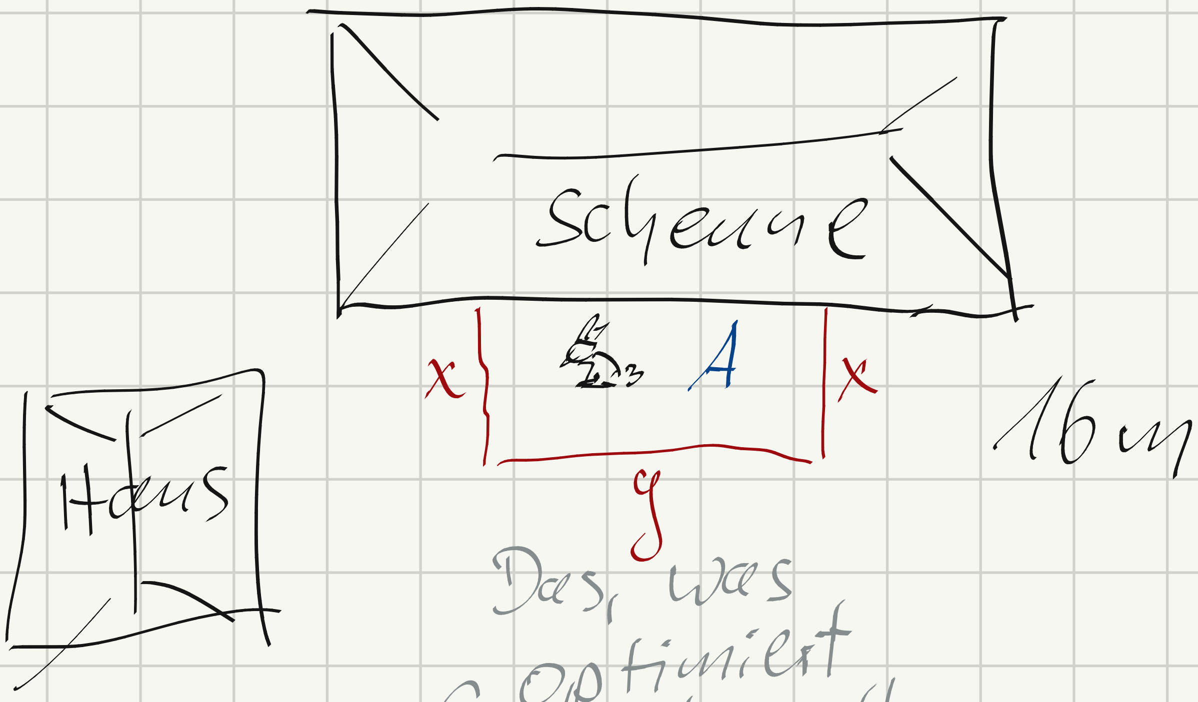
$f(0) = 4$
$f(2) = 0$
$f''(-1) = 0$

$$\left|\begin{array}{l} 0 + 0 + 1a_0 = 4 \\ 16a_4 + 4a_2 + 1a_0 = 0 \\ 12a_4 + 2a_2 + 0 = 0 \end{array}\right|$$

mit WTR:
$x = a_4 = \frac{1}{2}$
$y = a_2 = -3$
$z = a_0 = 4$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4$$

EXTREMWERTAUFGABEN / EXTREMALPROBLEME:



Das, was optimiert werden soll

Kochrezept:

1) Formulierung
Beide MÜSSEN

2) Auflösen der

3) Aus umgefor

4) Ableitungen (

5) Extrempunkt
Variablen berec

6) erste Optima

7) Gezielt die Fr
Lösung herbeifü

8) Antwortsatz (

Hauptbedingung (HB): $A = x \cdot y$ (1)

Nebenbedingung (NB): $16 = 2x + y \quad | -2x$

$(16 - 2x) = y$ (2)

Das, was uns einschränkt (Restriktion)

(3) Zielfunktion (ZF): $A(x) = x \cdot (16 - 2x)$

$$\boxed{A(x) = 16x - 2x^2}$$

(4)

$A'(x) = 16 - 4x$

$A''(x) = -4$

(5) notw. Bed.: $A'(x) = 0$

$0 = 16 - 4x \quad | +4x$

$4x = 16 \quad | :4$

$\underline{\underline{x = 4}}$

hinr. Bed.: $A''(x) \neq 0$

$A''(4) = -4 \Rightarrow$ Max!

(6) $\boxed{x^* = 4}$

(7)

Fragemöglichkeit 1: Wie sind die Maße des Hasenstalls zu wählen, wenn diese flächenmaximal werden soll?

→ geht immer am schnellsten mit der umgeformten Nebenbedingung (NB)

$y = 16 - 2x$

$y^* = 16 - 2 \cdot x^* = 16 - 2 \cdot 4 = 16 - 8 = \underline{\underline{8}}$

Fragemöglichkeit 2: Wie groß kann die Fläche des Hasenstalls maximal werden?

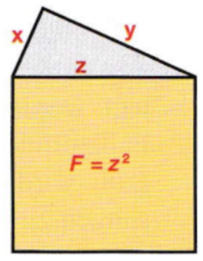
→ geht immer am schnellsten mit der fertigen Zielfunktion (ZF)

$A(x) = 16x - 2x^2$

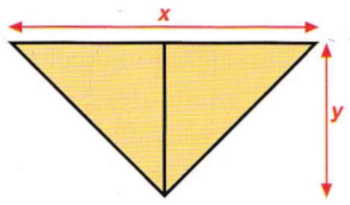
$A^*(4) = 16 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 = \underline{\underline{32}}$

(8) Antwort: Bei den Maßen 8m x 4m entsteht eine flächenoptimale Lösung von $32\,m^2$.

2 Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind zusammen 12 LE lang.
Wie groß sind die Katheten (x und y) zu wählen, damit das Quadrat F über der Hypotenuse z möglichst klein wird? Wie groß ist das Hypotenusenquadrat dann?



3 Der Querschnitt eines Kanals ist ein gleichschenkliges Dreieck. Aus bautechnischen Gründen soll $x + y = 23$ sein. Welche Maße sind für x und y zu wählen, damit der Querschnitt des Kanals möglichst groß wird? Wie groß ist er dann?



4 Aus einem Draht der Länge $l = 144$ cm soll ein durch seine Kanten angedeuteter Quader mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Welche Maße sind für die Kanten des Quaders zu wählen, wenn sein Volumen möglichst groß werden soll?

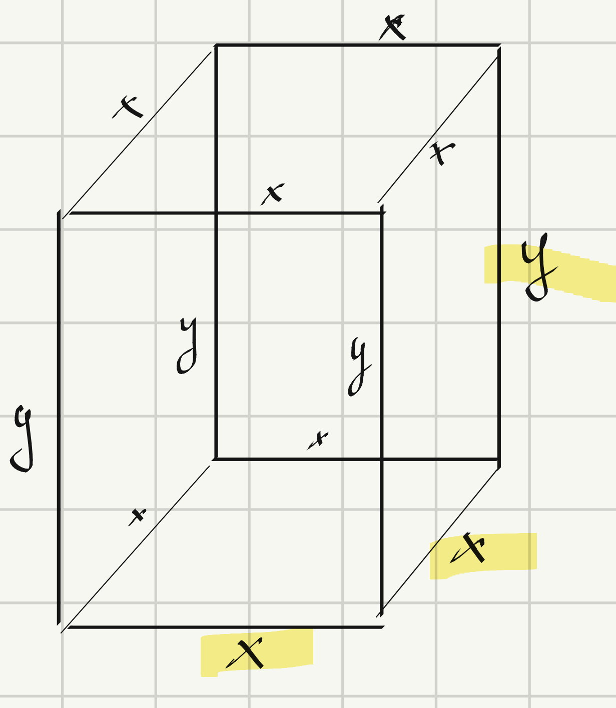
(4)

HB: $V = x^2 \cdot y$

NB: $144 = 8x + 4y \quad | -8x$

$144 - 8x = 4y \quad | :4$

$36 - 2x = y$



ZF: $V(x) = x^2 \cdot (36 - 2x)$

$V(x) = 36x^2 - 2x^3$

$V'(x) = 72x - 6x^2$

$V''(x) = 72 - 12x$

notw. Bed.: $V'(x) = 0$

$0 = 72x - 6x^2$

$0 = x \cdot (72 - 6x) \Rightarrow x_1 = 0$

$0 = 72 - 6x \quad | +6x$

$6x = 72 \quad | :6$

$x_2 = 12$

hinr. Bed.:

$V''(0) = 72 - 12 \cdot 0$

$V''(0) = 72 \Rightarrow$ Min ☹

$V''(12) = 72 - 12 \cdot 12$

$V''(12) = -72 \Rightarrow$ Max ☺

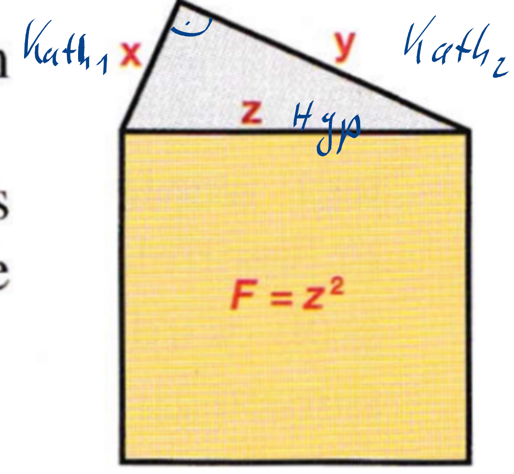
$\Rightarrow \boxed{x^* = 12}$

mit NB: $\boxed{y = 36 - 2x}$

$y^* = 36 - 2 \cdot x^* = 36 - 2 \cdot 12 = 36 - 24 = 12$

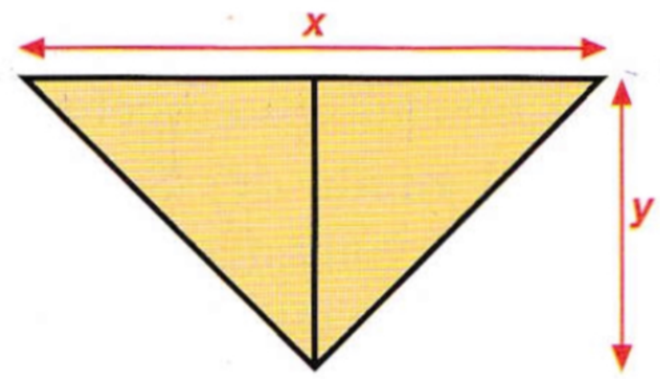
Antwort: Der volumenmaximale Quader ist ein Würfel mit einer Kantenlänge von 12 cm.

2 Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind zusammen 12 LE lang.
Wie groß sind die Katheten (x und y) zu wählen, damit das Quadrat F über der Hypotenuse z möglichst klein wird? Wie groß ist das Hypotenusenquadrat dann?



HB: $F = z^2 = x^2 + y^2$
NB: $12 = x + y$

3 Der Querschnitt eines Kanals ist ein gleichschenkliges Dreieck. Aus bautechnischen Gründen soll $x + y = 23$ sein. Welche Maße sind für x und y zu wählen, damit der Querschnitt des Kanals möglichst groß wird? Wie groß ist er dann?



4 Aus einem Draht der Länge $l = 144$ cm soll ein durch seine Kanten angedeuteter Quader mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Welche Maße sind für die Kanten des Quaders zu wählen, wenn sein Volumen möglichst groß werden soll?

3

HB: $A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$

NB: $23 = x + y \quad | -x$

$23 - x = y$

ZF: $A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (23 - x)$

$A(x) = 11{,}5x - \frac{1}{2}x^2$

$A'(x) = 11{,}5 - x$

$A''(x) = -1$

notw. Bed.: $A'(x) = 0$

$0 = 11{,}5 - x \quad | +x$

$x = 11{,}5$

hinr. Bed.: $A''(x) \neq 0$

$A''(11{,}5) = -1 \Rightarrow$ Max!

$\boxed{x^* = 11{,}5}$

$y^* = 23 - x^* = 23 - 11{,}5 = 11{,}5 \qquad \Rightarrow \quad x^* = y^* = 11{,}5$ LE

$A^* = \frac{1}{2} \cdot 11{,}5 \cdot 11{,}5 = 66{,}125$ FE

Antwort: Der Kanal hat bei einer Wahl von 11,5 LE für x und y eine maximale Querschnittsfläche von 66,125 FE.

(2)

HB: $F = z^2 = x^2 + y^2$

NB: $12 = x + y \quad | -x$

$12 - x = y$

ZF: $F(x) = x^2 + (12-x)^2$

$F(x) = x^2 + 144 - 24x + x^2$

$F(x) = 2x^2 - 24x + 144$

$F'(x) = 4x - 24$

$F''(x) = 4$

notw. Bed.: $F'(x) = 0$

$0 = 4x - 24 \quad | +24$

$24 = 4x \quad | :4$

$6 = x$

hinr. Bed.: $F''(x) \neq 0$

$F''(6) = 4 \Rightarrow$ Min :)

$\boxed{x^* = 6}$

$y^* = 12 - x^* = 12 - 6 = 6 \Rightarrow x^* = y^* = 6\ LE$

$\boxed{F^* = 6^2 + 6^2 = 72\ FE}$

Übung 9 (Oberflächenformel)
Eine Firma stellt oben offene Regentonnen für Hobbygärtner her. Diese sollen bei gegebenem Materialbedarf maximales Volumen besitzen.
a) Wie sind die Abmessungen zu wählen, wenn 2 m^2 Material je Regentonne zur Verfügung stehen?
b) Lösen Sie die Aufgabe allgemein.

$A = \pi \cdot r^2$
$u = 2 \cdot \pi \cdot r$

Kreis:

$A = \pi \cdot r^2$
$u = 2\pi \cdot r$

$u = 2 \cdot \pi \cdot r$
Mantel h
Boden

HB: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

NB: $2 = 2\pi r \cdot h + \pi \cdot r^2 \quad | -\pi r^2$

$2 - \pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \quad | : 2\pi r$

$\frac{2 - \pi r^2}{2\pi r} = h$

$\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{2}\pi r} - \frac{\cancel{\pi} r \cancel{r}}{2 \cancel{\pi} \cancel{r}} = h$

$\frac{1}{\pi r} - \frac{1}{2} r = h$

ZF: $V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{\pi r} - \frac{1}{2} r\right)$

$V(r) = \frac{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}{\cancel{\pi} \cancel{r}} - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^3$

$\boxed{V(r) = r - \frac{1}{2} \pi r^3}$

$V'(r) = 1 - 1{,}5 \pi r^2$
$V''(r) = -3\pi r$

notw. Bed.: $V'(r) = 0$

$0 = 1 - 1{,}5 \pi r^2 \quad | + 1{,}5 \pi r^2$
$1{,}5 \pi r^2 = 1 \quad | : 1{,}5\pi$
$r^2 = \frac{1}{1{,}5\pi} \quad | \sqrt{}$
$r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{1{,}5\pi}} \approx \pm 0{,}4607$

hinr. Bed.: $V''(r) \neq 0$

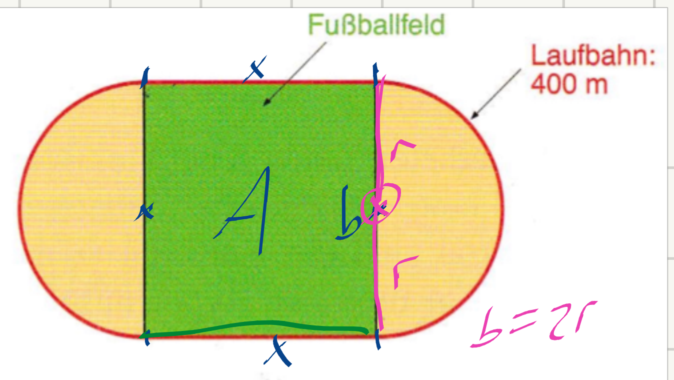
$V''(0{,}4607) = -3 \cdot \pi \cdot 0{,}4607$
$V''(0{,}4607) \approx -4{,}3 \Rightarrow$ Max ☺

$V''(-0{,}4607) = -3 \cdot \pi \cdot (-0{,}4607)$
$V''(-0{,}4607) \approx 4{,}3 \Rightarrow$ Min ☹ $\Rightarrow r^* = 0{,}4607\ (m)$

$h^* = \frac{1}{\pi r^*} - \frac{1}{2} r^* = \frac{1}{\pi \cdot 0{,}4607} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}4607 \approx 0{,}4606\ (m)$

Antwort: Bei einem Radius von etwa 0,46 cm und einer Höhe von ebenso etwa 0,46 cm ergibt sich eine volumenmaximale Regentonne, die einen Materialaufwand von exakt zwei Quadratmeter aufweist.

9 In einem Sportstadion soll eine 400-Meter-Laufbahn (bestehend aus 2 parallelen Geraden und 2 angesetzten Halbkreisen) so angelegt werden, dass das integrierte Fußballfeld (Rechteck) möglichst groß wird. Wie sind die Abmessungen zu wählen?



HB: $A = x \cdot \cancel{b}2r$
NB: $400 = 2x + 2\pi r$

HB: $A = x \cdot 2r$

NB: $400 = 2x + 2\pi r \quad | -2\pi r$

$400 - 2\pi r = 2x \quad | :2$

$200 - \pi r = x$

ZF: $A(r) = (200 - \pi r) \cdot 2r$

$A(r) = 400r - 2\pi r^2$

$A'(r) = 400 - 4\pi r$

$A''(r) = -4\pi$

• notw. Bed.: $A'(r) = 0$

$0 = 400 - 4\pi r \quad | +4\pi r$

$4\pi r = 400 \quad | :4\pi$

$r \approx 31{,}83$

• hinr. Bed.: $A''(x) \neq 0$

$A''(31{,}83) = -4 \cdot \pi \Rightarrow$ Max! ☺

Maße Fußballfeld:

Breite: $b^* = 2 \cdot r^* = 2 \cdot 31{,}83 = 63{,}66$

Länge: $x^* = 200 - \pi \cdot r^* = 200 - \pi \cdot 31{,}83 \approx 100$

Antwort: Bei einer Länge von 100 Metern und einer Breite von 63,66 Metern wird das Fußballfeld trotz der Laufbahn mit einer vordefinierten Länge von 400 Metern flächenmaximal.

Übung 3

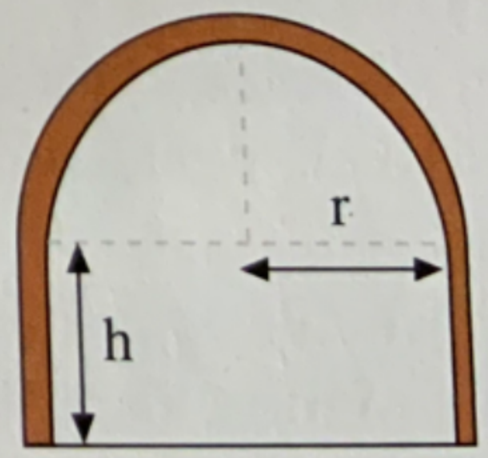
Ein Tunnel soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten. Wie groß ist die Querschnittsfläche maximal, wenn der Umfang des Tunnels 20 m betragen soll?

Rechteck unten   Halbkreis oben

h

r r r

$= 2r$



HB: $A = h \cdot 2r + \frac{1}{2} \cdot \pi r^2$

NB: $20 = \underbrace{2h}_{2\times\text{ Seiten}} + \underbrace{2r}_{\text{unten}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2\pi r}_{\text{Halbkreisbogen}}$

$20 = 2h + 2r + \pi r \quad | -2r \quad | -\pi r$

$20 - 2r - \pi r = 2h \quad | :2$

$10 - r - \frac{1}{2}\pi r = h$

ZF: $A(r) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot r \cdot (10 - r - \frac{1}{2}\pi r)$

$A(r) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 + 20r - 2r^2 - \pi r^2$

$A(r) = -\frac{1}{2}\pi r^2 - 2r^2 + 20r$

$A(r) = (-\frac{1}{2}\pi - 2) \cdot r^2 + 20r$

$A'(r) = 2 \cdot (-\frac{1}{2}\pi - 2) \cdot r + 20$

$= (-\pi - 4) r + 20$

$A''(r) = -\pi - 4$

notw. Bed.: $A'(r) = 0$

$0 = (-\pi - 4) \cdot r + 20 \quad | -20$

$-20 = (-\pi - 4) \cdot r \quad | : (-\pi - 4)$

$\frac{-20}{-\pi - 4} = r$

$\frac{\cancel{-1} \cdot (20)}{\cancel{-1} \cdot (\pi + 4)} = r$

$r = \frac{20}{\pi + 4} \approx 2{,}8$

hinr. Bed.: $A''(r) \neq 0$

$A''(\frac{20}{\pi+4}) = -\pi - 4 \Rightarrow$ Max! ☺

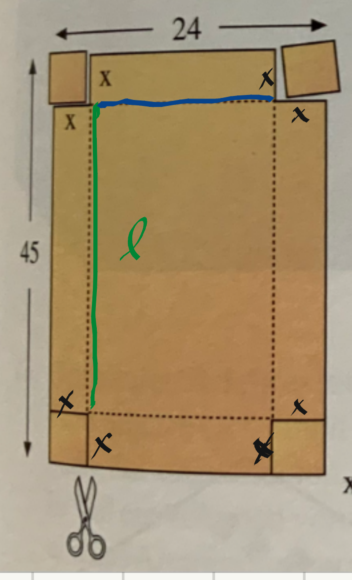
$\boxed{r^* = \frac{20}{\pi + 4} \approx 2{,}8}$

$A(\frac{20}{\pi+4}) = (-\frac{1}{2}\pi - 2) \cdot (\frac{20}{\pi+4})^2 + 20 \cdot \frac{20}{\pi+4}$

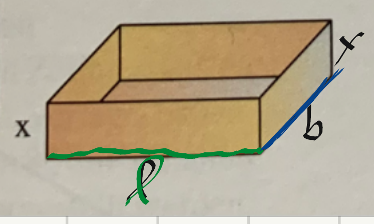
$A(\frac{20}{\pi+4}) \approx 28$

Antwort: Die maximale Querschnittsfläche beträgt etwa 28 Quadratmeter.

S. 177



17. Aus einem rechteckigen Stück Pappe von 45 cm Länge und 24 cm Breite soll eine oben offene Schachtel hergestellt werden. Dazu wird an jeder der vier Ecken ein Quadrat abgeschnitten. Anschließend werden die überstehenden Streifen hochgeklappt. Wie groß müssen die Quadrate sein, damit das Volumen der Schachtel maximal wird?



V max!

$V = l \cdot b \cdot x$

HB: $V = l \cdot b \cdot x$

NB₁: $45 = l + 2x \iff 45 - 2x = l$

NB₂: $24 = b + 2x \iff 24 - 2x = b$

ZF: $V(x) = [(45-2x)\cdot(24-2x)]\cdot x$

$V(x) = (1080 - 90x - 48x + 4x^2)\cdot x$

$V(x) = (4x^2 - 138x + 1080)\cdot x$

$V(x) = 4x^3 - 138x^2 + 1080x$

$V'(x) = 12x^2 - 276x + 1080$

$V''(x) = 24x - 276$

notw. Bed.: $V'(x) = 0$

$0 = 12x^2 - 276x + 1080 \quad |:12$

$0 = x^2 - 23x + 90$

$x_{1,2} = 11{,}5 \pm \sqrt{11{,}5^2 - 90}$

$x_{1,2} = 11{,}5 \pm 6{,}5$

$x_1 = 5$

$x_2 = 18$

hinr. Bed.: $V''(x) \neq 0$

$V''(5) = 24 \cdot 5 - 276$

$V''(5) = -156 \Rightarrow$ Max ☺

$V''(18) = 24 \cdot 18 - 276$

$V''(18) = 156 \Rightarrow$ Min ☹

$\boxed{x^* = 5}$

Antwort: Der Einschnitt x muss exakt 5 cm tief sein, damit das Volumen der Schachtel maximal wird.

S. 178

21. Aquarium

Zoodirektor Dr. Brinkmann plant ein neues Aquarium. Es soll doppelt so lang wie breit werden. Oben ist es offen. Das Glas für die Bodenplatte kostet 300 €/m², das Glas für die Seitenscheiben ist mit nur 250 €/m² etwas preiswerter. Das Aquarium soll ein Fassungsvermögen von 200 m³ erhalten. Welche Maße muss Dr. Brinkmann wählen, damit sein neues Aquarium möglichst billig wird? Wie hoch ist der Preis?

h

h

2x

l

x

b

Vorüberlegungen:

$A_{Boden} = 2x \cdot x = 2x^2$

$A_{Seiten} = 2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot 2x \cdot h$
$= 2xh + 4xh = 6xh$

Fassungsvermögen ≙ Volumen

$V = l \cdot b \cdot h$

$V = 2x \cdot x \cdot h$

$V = 2x^2 \cdot h$

min → Geld (Kosten)

$$HB: P = \underbrace{300 \cdot 2x^2}_{\text{Preis Boden}} + \underbrace{250 \cdot 6xh}_{\text{Preis Seiten}}$$

200 = Fassungsvermögen

$$NB: 200 = 2x^2 \cdot h \quad | :2x^2$$
$$\frac{200}{2x^2} = h$$
$$\frac{100}{x^2} = h$$

$$ZF: P(x) = 300 \cdot 2x^2 + 250 \cdot 6 \cdot x \cdot \frac{100}{x^2}$$
$$P(x) = 600x^2 + \frac{150\,000 \cdot \cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}$$
$$P(x) = 600x^2 + \frac{150\,000}{x}$$
$$P(x) = 600x^2 + 150\,000 \cdot \frac{1}{x}$$
$$P(x) = 600x^2 + 150\,000\, x^{-1}$$

$$P'(x) = 1200x - 150\,000 \cdot x^{-2} = 1200x - \frac{150\,000}{x^2}$$
$$P''(x) = 1200 + 300\,000 \cdot x^{-3} = 1200 + \frac{300\,000}{x^3}$$

notw. Bed.: $P'(x) = 0$

$$0 = 1200x - \frac{150\,000}{x^2} \quad \left| + \frac{150\,000}{x^2}\right.$$
$$\frac{150\,000}{x^2} = 1200x \quad | \cdot x^2$$
$$150\,000 = 1200x^3 \quad | :1200$$
$$125 = x^3 \quad | \sqrt[3]{\ }$$
$$5 = x$$

hinr. Bed.: $P''(x) \neq 0$

$$P''(5) = 1200 + \frac{300\,000}{5^3}$$
$$P''(5) = 3600 \Rightarrow \text{Min!}$$

☺

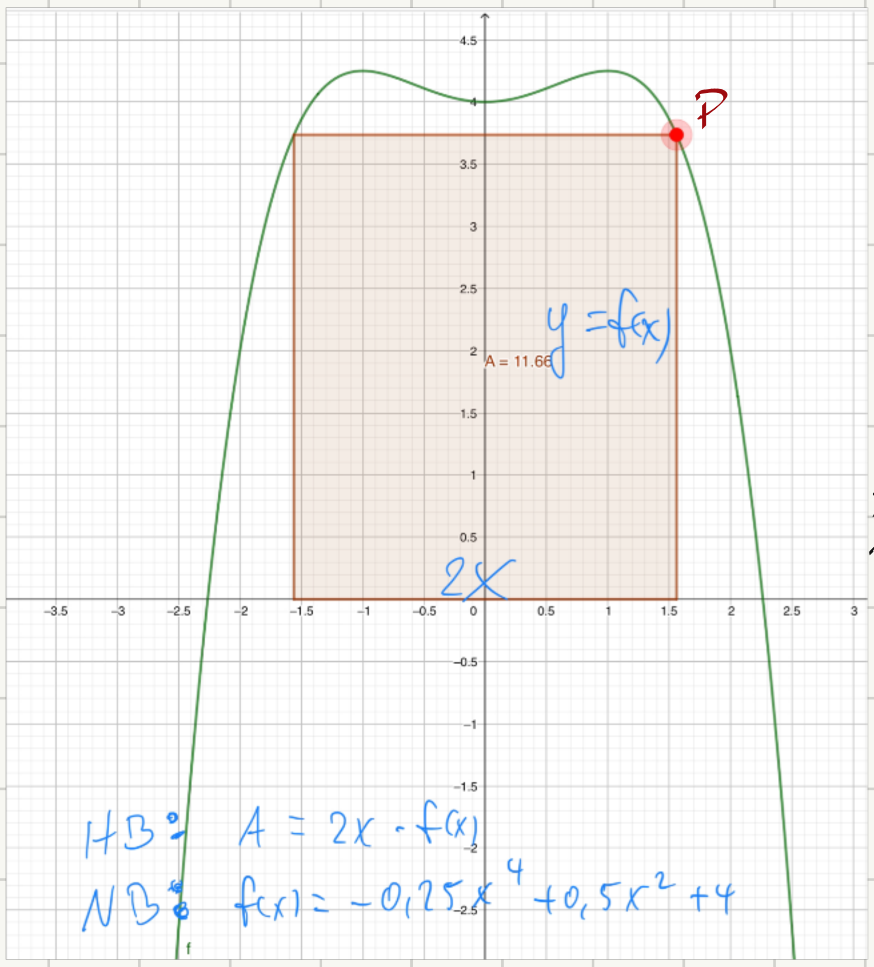
$$\boxed{x^* = 5}$$

$$h^* = \frac{100}{(x^*)^2} = \frac{100}{5^2} = 4$$

Maße:
Länge: $2x^* = 2 \cdot 5 = 10$ (m)
Breite: $x = 5$ (m)
Höhe: 4 (m)

$$P(5) = 600 \cdot 5^2 + 150\,000 \cdot 5^{-1}$$
$$P(5) = 45.000 \text{ (€)}$$

Antwort:
Mit den Maßen 10 x 5 x 4 Meter (l x b x h) ergibt sich eine kostenminimale Konstellation für das Aquarium in einer Höhe von 45.000 €.



HB: $A = 2x \cdot f(x)$

NB: $f(x) = -0{,}25x^4 + 0{,}5x^2 + 4$

ZF: $A(x) = 2x \cdot (-0{,}25x^4 + 0{,}5x^2 + 4)$

$A(x) = -0{,}5x^5 + x^3 + 8x$

$A'(x) = -2{,}5x^4 + 3x^2 + 8$

$A''(x) = -10x^3 + 6x$

notw. Bed.: $A'(x) = 0$

$0 = -2{,}5x^4 + 3x^2 + 8$

substituiere:

$x^2 = z$

$x^4 = z^2$

$0 = -2{,}5 \cdot z^2 + 3z + 8 \quad | :(-2{,}5)$

$0 = z^2 - \frac{6}{5}z - \frac{16}{5}$

$z_{1,2} = \frac{3}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}}$

$z_{1,2} \approx \frac{3}{5} \pm 1{,}8868$

$z_1 = 2{,}4868$

$z_2 = -1{,}2868$

resubstituiere:

mit $x^2 = z$

für $z_1 = 2{,}4868$	für $z_2 = -1{,}2868$
$x^2 = 2{,}4868 \quad \vert\sqrt{\ }$	$x^2 = -1{,}2868 \quad \vert\sqrt{\ }$
$x_1 \approx 1{,}577$	$x_3 =$ n. d.
$x_2 \approx -1{,}577$	$x_4 =$ n. d.

• hinr. Bed.: $A''(x) \neq 0$

$A''(1{,}577) = -10 \cdot 1{,}577^3 + 6 \cdot 1{,}577$

$A''(1{,}577) \approx -29{,}75 \Rightarrow$ Max 🙂

$A''(-1{,}577) = -10 \cdot (-1{,}577)^3 + 6 \cdot (-1{,}577)$

$A''(-1{,}577) \approx 29{,}75 \Rightarrow$ Min ☹

$x^* = 1{,}577$

Vervollständigung Punkt P:

$f(1{,}577) = -0{,}25 \cdot 1{,}577^4 + 0{,}5 \cdot 1{,}577^2 + 4$

$f(1{,}577) \approx 3{,}697$

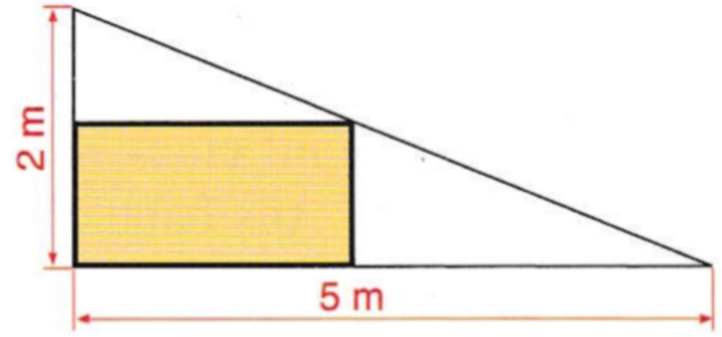
$P(1{,}577 / 3{,}697)$

• maximal möglicher Flächeninhalt

ZF: $A(1{,}577) = -0{,}5 \cdot 1{,}577^5 + 1{,}577^3 + 8 \cdot 1{,}577$

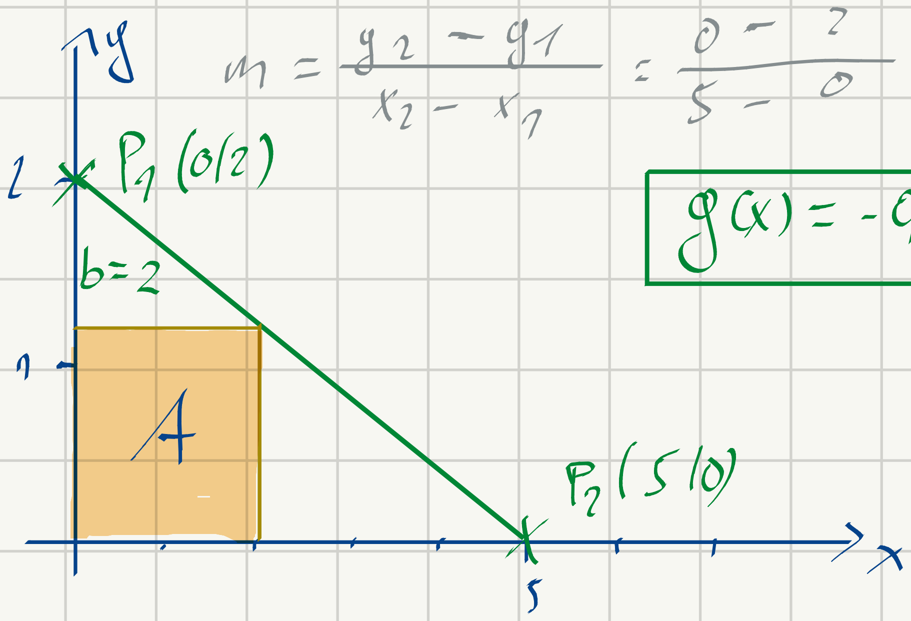
$A(1{,}577) \approx 11{,}661 \ (\text{cm}^2)$

10 In die Abseite[1] eines Dachbodens soll wie in der Skizze angegeben der Lüftungsschacht einer Klimaanlage eingebaut werden. Wie sind Länge und Breite des Schachtes zu wählen, damit die Querschnittsfläche und damit das Durchflussvolumen möglichst groß wird?



$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{5-0} = \frac{-2}{5} = -0{,}4$

$\boxed{g(x) = -0{,}4x + 2}$



HB: $A = x \cdot g(x)$

NB: $g(x) = -0{,}4x + 2$

ZF: $A(x) = x \cdot (-0{,}4x + 2)$

$A(x) = -0{,}4x^2 + 2x$

$A'(x) = -0{,}8x + 2$

$A''(x) = -0{,}8$

- notw. Bed.: $A'(x) = 0$

$0 = -0{,}8x + 2 \quad | +0{,}8x$

$0{,}8x = 2 \quad | :0{,}8$

$x = 2{,}5$

- hinr. Bed.: $A''(x) \neq 0$

$A''(2{,}5) = -0{,}8 \Rightarrow$ Max

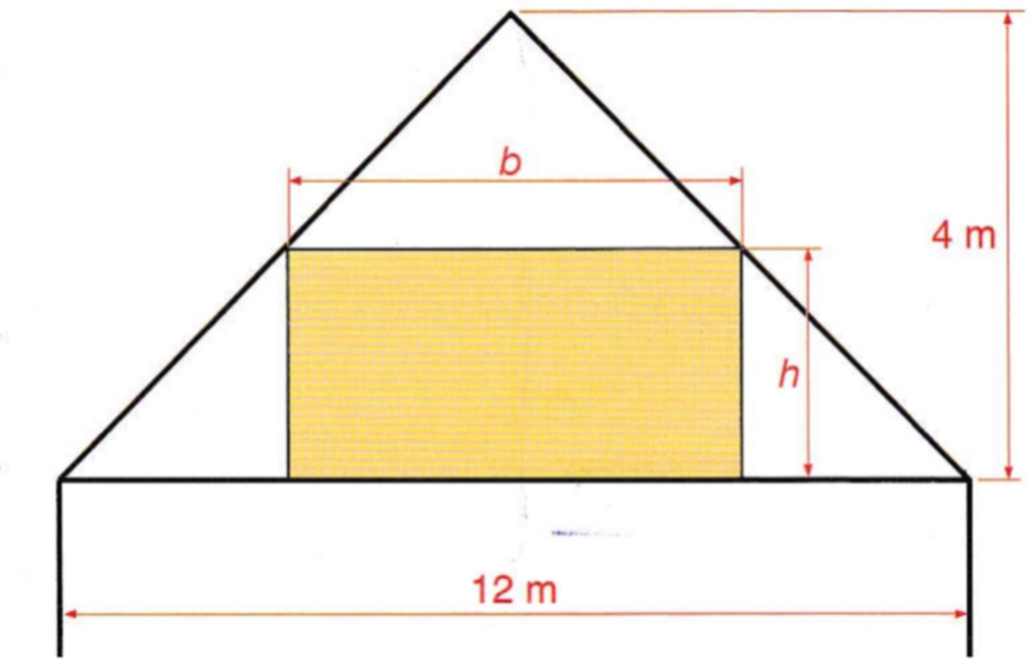
$\boxed{x^* = 2{,}5}$

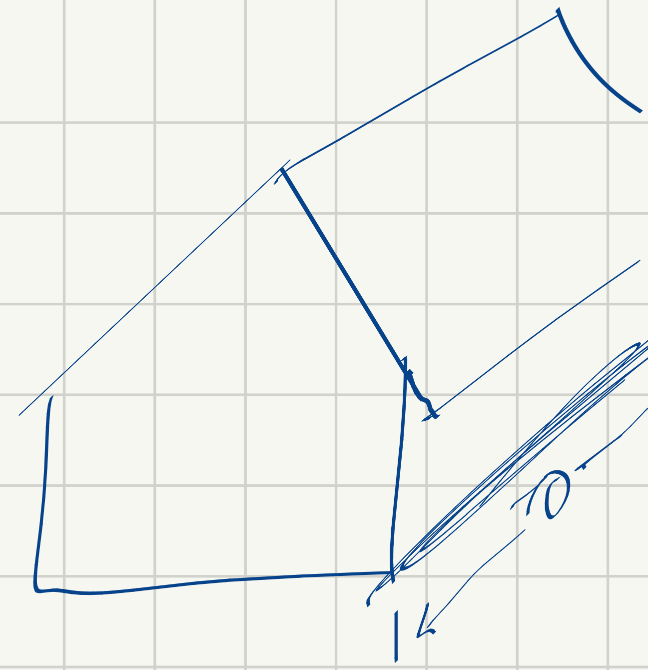
$g(2{,}5) = -0{,}4 \cdot 2{,}5 + 2$

$g(2{,}5) = 1$

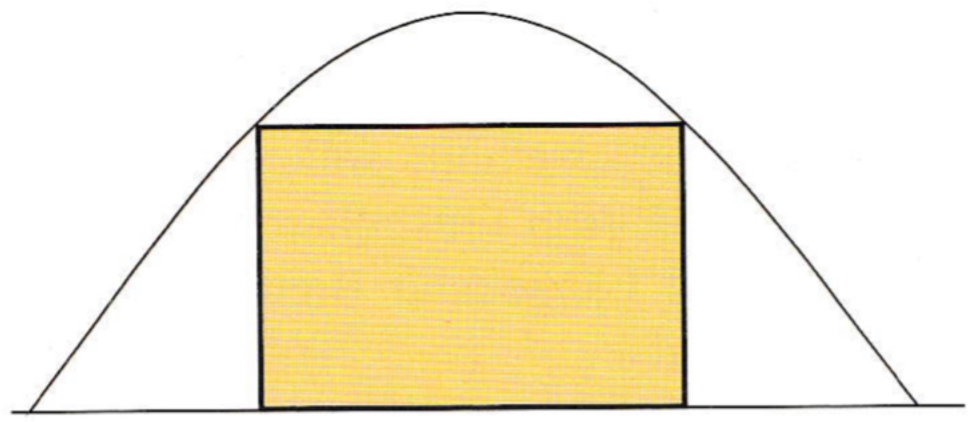
Antwort: Der Luftschacht muss 1m hoch und 2,5m breit sein.

12 Im Dachbodenraum eines Kindergartens soll ein Zimmer eingerichtet werden. Die Länge des Dachbodens beträgt 10 m.
Berechnen Sie das maximale Volumen des neuen Raumes und die dazugehörige maximale Wohnfläche.

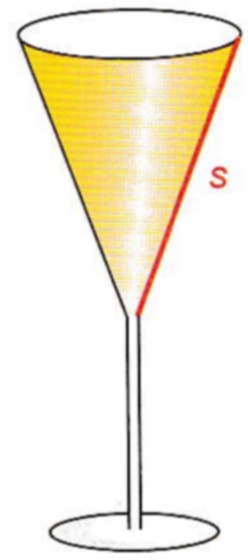




13 Die Seitenwand eines Flugzeughangars hat die Form eines Graphen mit der Gleichung
$f(x) = \frac{1}{25}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{9}{5}$ für
$[-1{,}84;\ 1{,}84]$.
In diese Seitenwand der Halle soll ebenerdig ein Tor mit möglichst großer Fläche eingebaut werden.

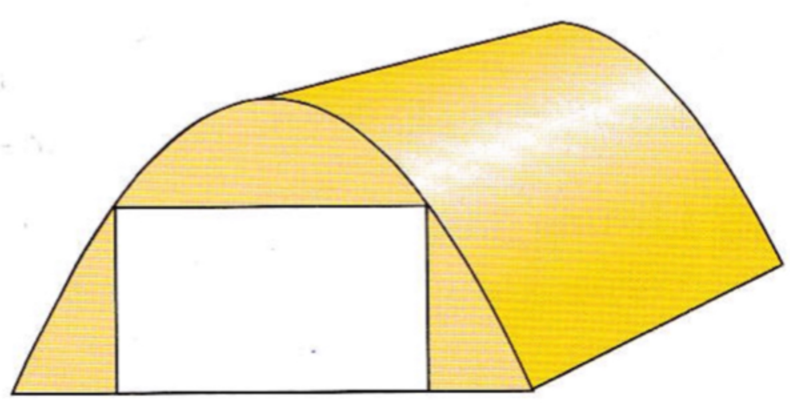


14 Ein Designer möchte eine neue Sektglasform mit trichterförmigem Querschnitt kreieren. Dabei soll die Seitenlänge s des Kelches mit 12 cm fest vorgegeben sein.
Für welche Maße des Sektglases wird sein Volumen maximal? Wie groß ist dann das maximale Volumen?



kein „einbeschriebenes" Problem

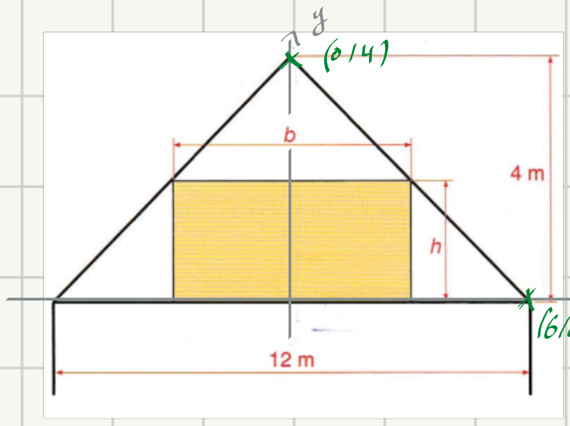
15 Die Seitenwand einer Tennishalle hat die Form einer Parabel mit der Gleichung $f(x) = -\frac{8}{81}x^2 + 8$. In diese Seitenwand der Halle soll aus Werbegründen ebenerdig ein Fenster mit möglichst großer Fläche eingebaut werden.



(12)

HB: $A = x \cdot g(x)$

NB: $g(x) = -\frac{2}{3}x + 4$



$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-4}{6-0} = -\frac{2}{3}$

$\boxed{g(x) = -\frac{2}{3}x + 4}$

ZF: $A(x) = x \cdot \left(-\frac{2}{3}x + 4\right)$

$A(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$

$A'(x) = -\frac{4}{3}x + 4$

$A''(x) = -\frac{4}{3}$

notw. Bed.: $A'(x) = 0$

$0 = -\frac{4}{3}x + 4 \quad \left| + \frac{4}{3}x \right.$

$\frac{4}{3}x = 4 \quad \left| : \frac{4}{3} \right.$

$x = 3$

hinr. Bed.: $A''(x) \neq 0$

$A''(3) = -\frac{4}{3} \Rightarrow$ Max ☺

$\boxed{x^* = 3}$

Maße:

Breite: $b^* = 2 \cdot x^* = 2 \cdot 3 = 6\,(m)$

Höhe: $h^* = g(3) = -\frac{2}{3} \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 = 6\,(m)$

Tiefe: $t = 10\,m$ (siehe Aufg.)

maximales Volumen: $V^* = b^* \cdot h^* \cdot t = 6 \cdot 6 \cdot 10 = 360\,(m^3)$

zugehörige Wohnfläche: $A = b^* \cdot t = 6 \cdot 10 = 60\,(m^2)$

ANTWORT: Bei den Maßen 6m x 6m x 10m entsteht ein maximaler Rauminhalt von 360 Kubikmetern.
Die Zugehörige Wohnfläche beträgt 60 Quadratmeter.

---

(13) HB: $A = 2x \cdot f(x)$

NB: $f(x) = \frac{1}{25}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{9}{5}$

ZF: $A(x) = 2x \cdot \left(\frac{1}{25}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{9}{5}\right)$

$A(x) = \frac{2}{25}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{18}{5}x$

$A'(x) = \frac{2}{5}x^4 - 4x^2 + \frac{18}{5}$

$A''(x) = \frac{8}{5}x^3 - 8x$

notw. Bed.: $A'(x) = 0$

aus Zeitgründen ausnahmsweis mit dem WTR bestimmt.

$0 = \frac{2}{5}x^4 - 4x^2 + \frac{18}{5}$

$x = 3$ nicht in D

$x_2 = 1$

$x_3 = -1$

$x_4 = -3$ nicht in D

hinr. Bed.: $A''(x) \neq 0$

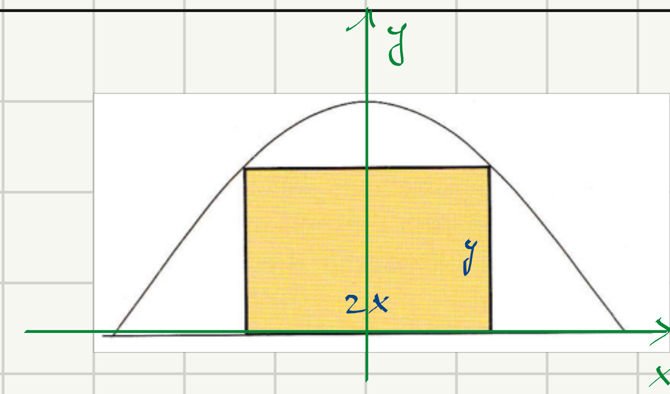
$A''(1) = \frac{8}{5} \cdot 1^3 - 8 \cdot 1$

$A''(1) = -6{,}4 \Rightarrow$ Max ☺

$A''(-1) = \frac{8}{5} \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1)$

$A''(-1) = 6{,}4 \Rightarrow$ Min ☹

$\Rightarrow \boxed{x^* = 1}$



Maße des Tors:

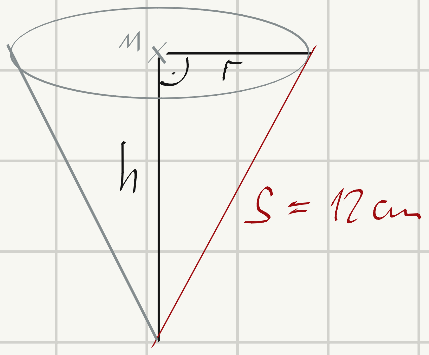
Breite: $2 \cdot x^* = 2 \cdot 1 = \underline{2\ LE}$

Höhe: $f(1) = \frac{1}{25} \cdot 1^4 - \frac{2}{3} \cdot 1^2 + \frac{9}{5}$

$f(1) \approx \underline{\frac{88}{75}\ LE}$

Fläche: $A_{max} = \frac{88}{75} \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{176}{75}\ FE}}$

(14)



HB: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$

NB: $12^2 = h^2 + r^2$

$144 = h^2 + r^2 \quad | -h^2$

$144 - h^2 = r^2 \quad | : \frac{1}{4}$

$\sqrt{144-h^2} = r$

ZF: $V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\sqrt{144-h^2})^2 \cdot h$

$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (144 - h^2) \cdot h$

$V(h) = \frac{1}{3}\pi h \cdot (144 - h^2)$

$V(h) = 48 \cdot \pi \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^3$

$V'(h) = 48 \cdot \pi - \pi h^2$

$V''(h) = -2\pi h$

notw. Bed.: $V'(h) = 0$

$0 = 48\pi - \pi h^2 \quad | + \pi h^2$

$\pi h^2 = 48\pi \quad | : \pi$

$h^2 = 48$

$h_1 \approx 6{,}928$

$h_2 \approx -6{,}928$

hinr. Bed.: $V''(h) \neq 0$

$V''(6{,}928) = -2 \cdot \pi \cdot 6{,}928$

$V''(6{,}928) \approx -43{,}5 \Rightarrow$ Max ☺

$V''(-6{,}928) = -2 \cdot \pi \cdot (-6{,}928)$

$V''(-6{,}928) \approx 43{,}5 \Rightarrow$ Min ☹

$\Rightarrow h^* = 6{,}928$ (cm)

$r^* = \sqrt{144 - (h^*)^2}$

$= \sqrt{144 - 6{,}928^2}$

$\approx 9{,}798$

$V^* = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r^*)^2 \cdot h^*$

$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9{,}798^2 \cdot 6{,}928$

$\approx 696{,}48$

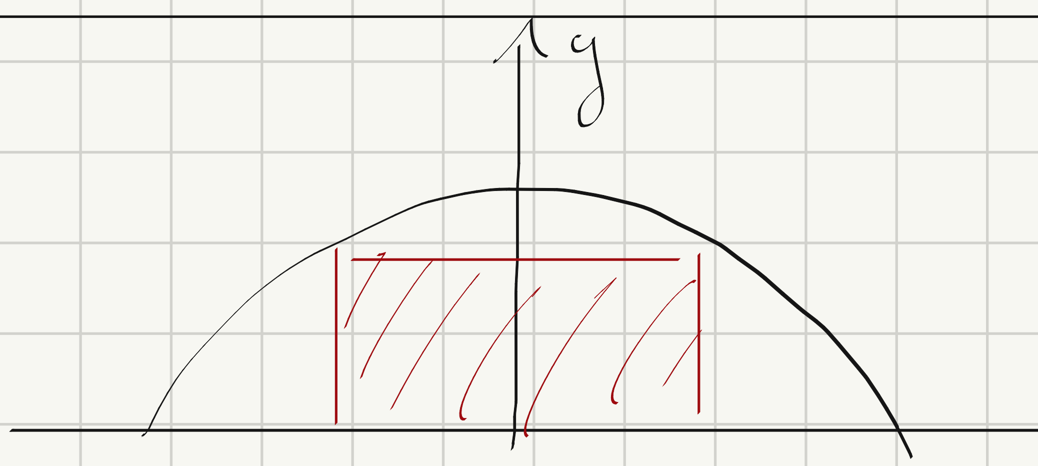
Antwort: Bei einem Radius von etwa 9,798 cm und einer Höhe des Kelches von ca. 7 cm entsteht ein maximales Volumen von etwas mehr als 695 Kubikzentimetern.

---

(15)

HB: $A = 2x \cdot f(x)$

NB: $f(x) = -\frac{8}{81}x^2 + 8$



ZF: $A(x) = 2x \cdot (-\frac{8}{81}x^2 + 8)$

$A(x) = -\frac{16}{81}x^3 + 16x$

$A'(x) = -\frac{16}{27}x^2 + 16$

$A''(x) = -\frac{32}{27}x$

- notw. Bed.: $A'(x) = 0$

$0 = -\frac{16}{27}x^2 + 16 \quad | + \frac{8}{3}x^2$

$\frac{16}{27}x^2 = 16 \quad | : \frac{16}{27}$

$x^2 = 27 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 \approx 5{,}2$

$x_2 \approx -5{,}2$

- hinr. Bed.: $A''(x) \neq 0$

$A''(5{,}2) = -\frac{32}{27} \cdot 5{,}2$

$A''(5{,}2) \approx -6 \Rightarrow$ Max ☺

$A''(-5{,}2) = -\frac{32}{27} \cdot (-5{,}2)$

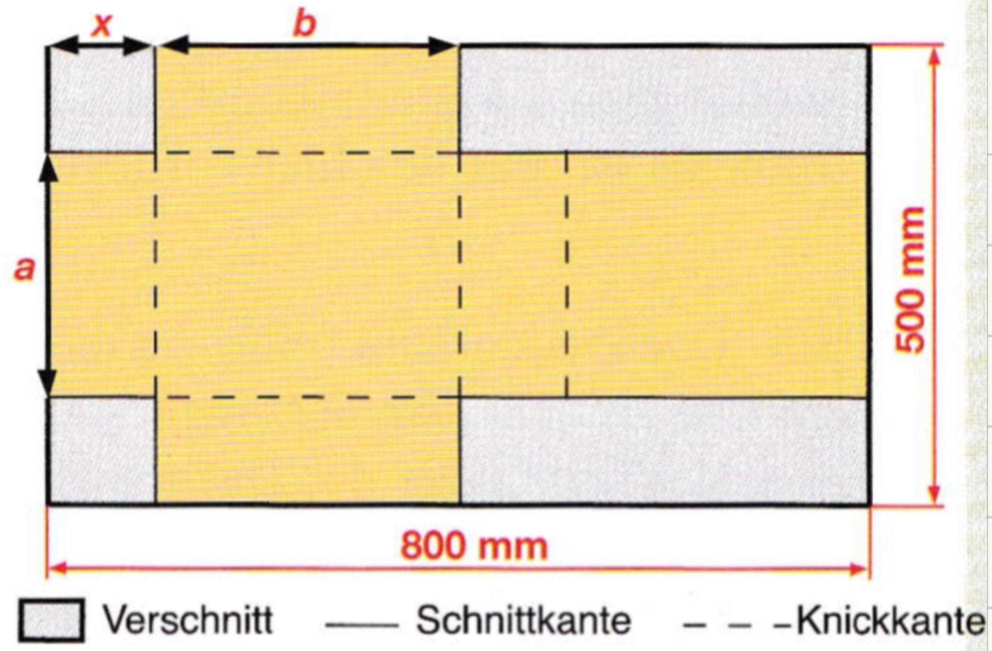
$A''(-5{,}2) \approx 6 \Rightarrow$ Min ☹

$A_{max}(5{,}2) = -\frac{16}{81} \cdot 5{,}2^3 + 16 \cdot 5{,}2$

$A_{max}(5{,}2) \approx 55{,}43$

Antwort: Das Fenster kann maximal eine Größe von etwa 55,43 Flächeneinheiten einnehmen.

5 Aus Blechtafeln 500 mm × 800 mm sollen entsprechend dem unten abgebildeten Netz durch Ausschneiden, Biegen und Schweißen allseitig geschlossene quaderförmige Kanister mit möglichst großem Volumen hergestellt werden.



HB: $V = a \cdot b \cdot x$

NB₁: $500 = a + 2x \iff 500 - 2x = a$

NB₂: $800 = 2b + 2x \iff 800 - 2x = 2b \quad |:2$

$400 - x = b$

ZF: $V(x) = (500 - 2x) \cdot (400 - x) \cdot x$

$V(x) = (200000 - 500x - 800x + 2x^2) \cdot x$

$V(x) = (200000 - 1300x + 2x^2) \cdot x$

$V(x) = 2x^3 - 1300x^2 + 200000x$

$V'(x) = 6x^2 - 2600x + 200000$

$V''(x) = 12x - 2600$

∘ notw. Bed.: $V'(x) = 0$:

$0 = 6x^2 - 2600x + 200000 \quad |:6$

$0 = x^2 - \frac{1300}{3}x + \frac{100000}{3}$

$x_{1,2} = \frac{1300}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{1300}{6}\right)^2 - \frac{100000}{3}}$

$x_{1,2} = \frac{1300}{6} \pm \frac{350}{3}$

$x_1 = \frac{1000}{3}$

$x_2 = 100$

∘ hinr. Bed.: $V''(x) \neq 0$:

$V''\left(\frac{1000}{3}\right) = 12 \cdot \frac{1000}{3} - 2600$

$V''\left(\frac{1000}{3}\right) = 1400$ Min ☹

$V''(100) = 12 \cdot (100) - 2600$

$V''(100) = -1400$ Max ☺

$\boxed{x^* = 100\,(mm)}$

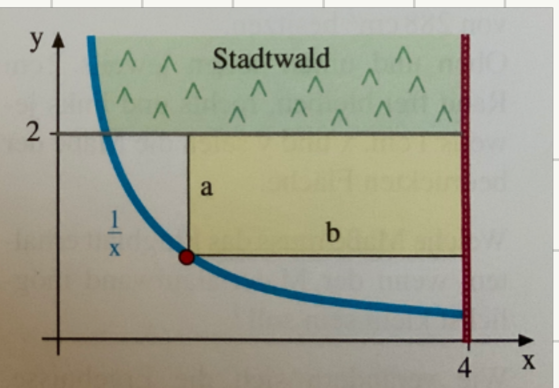
$a^* = 500 - 2x^* = 500 - 2 \cdot 100 = \underline{\underline{300\,(mm)}}$

$b^* = 400 - x^* = 400 - 100 = \underline{\underline{300\,(mm)}}$

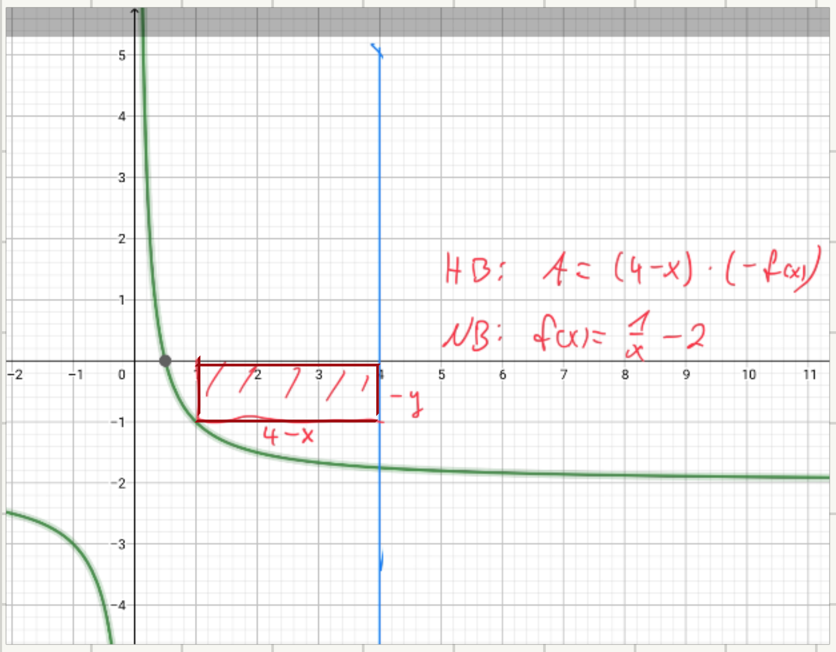
$V^* = a^* \cdot b^* \cdot x^* = 300 \cdot 300 \cdot 100$

$= \underline{\underline{9000000\,(mm^3)}}$

20. Zwischen Autobahn, Stadtwald und Fluss soll, wie aus der Planungszeichnung ersichtlich, ein neues Gewerbegebiet erschlossen werden, dessen südwestliche Ecke exakt am Fluss $f(x) = \frac{1}{x}$ liegt und dessen Grundstücksgrenzen achsenparallel verlaufen.
Welche Maße erhält das Gebiet, wenn
a) die Grundstücksfläche maximal sein soll,
b) die südliche und östliche Begrenzung eine möglichst lange Werbefläche bilden soll?



S. 177



a) HB: $A = (4-x)\cdot(-f(x))$
NB: $f(x) = \frac{1}{x} - 2$

ZF: $A(x) = (4-x)\cdot\left(-\left(\frac{1}{x} - 2\right)\right)$
$A(x) = (4-x)\cdot\left(-\frac{1}{x} + 2\right)$
$A(x) = -\frac{4}{x} + 8 + 1 - 2x$
$A(x) = -4\cdot x^{-1} + 9 - 2x$

$A'(x) = 4\cdot x^{-2} - 2$
$A''(x) = -8x^{-3}$

notw. Bed.: $A'(x) = 0$

$0 = 4\cdot x^2 - 2 \quad | +2$
$2 = 4x^2 \quad | :4$
$0{,}5 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$
$0{,}25 = x_1$
$-0{,}25 = x_2$

hinr. Bed.:

$A''(0{,}25) = -8\cdot 0{,}25^{-3}$
$A''(0{,}25) = -512 \Rightarrow$ Max ☺

$A''(-0{,}25) = -8\cdot(-0{,}25)^{-3}$
$A''(-0{,}25) = 512 \Rightarrow$ Min ☹

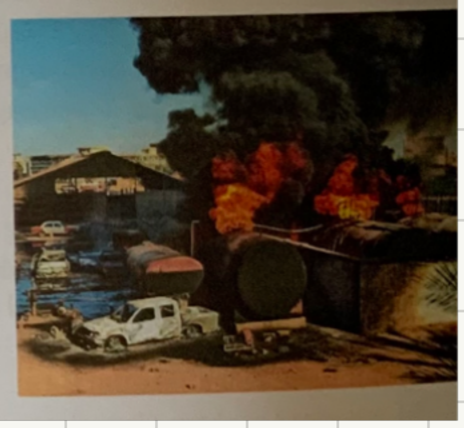
$\Rightarrow \boxed{x^* = 0{,}25}$

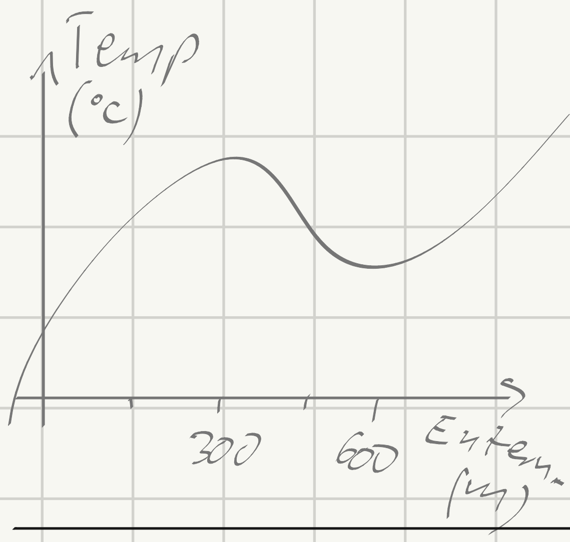
Maße: Breite: $4 - 0{,}25 = 3{,}75$
Höhe: $f(0{,}25) = \frac{1}{0{,}25} - 2 = 2$

Fläche: $A = 3{,}75 \cdot 2 = 7{,}5$ FE

15. Explosion
Bei der Explosion eines Öltanks betrug die Hitze im Zentrum über 1000 °C. Die weglaufenden Menschen wurden von der Strahlungshitze erfasst und erlitten z.T. schwere Verbrennungen, wenn sie nicht schnell genug Deckung fanden. Die Temperatur kann angenähert erfasst werden durch die Funktion $T(x) = 10x^3 - 90x^2 + 1100$, $0 < x < 6$, wobei x die Entfernung vom Zentrum in 100 m und T die Temperatur in °C ist.

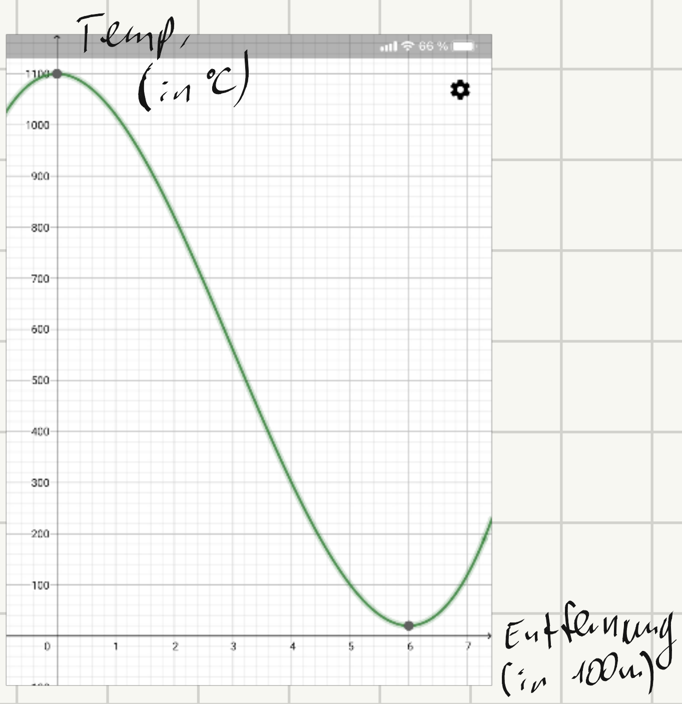
a) Zeichnen Sie den Graphen von T.
b) Welche Temperatur herrschte in 300 m Entfernung vom Zentrum?
c) Wie groß ist die mittlere Temperaturänderung auf den ersten 300 m? (Angabe in °C/m oder in °C/100 m) Wie groß ist sie zwischen 400 m und 500 m?
d) Wie groß ist die momentane Temperaturänderung 300 m vom Zentrum entfernt? Ermitteln Sie diese zeichnerisch.





Skizze
(erstes Erkunden des Sachverhalts...)

a)



b)
$T(3) = 10 \cdot 3^3 - 90 \cdot 3^2 + 1100$
$\underline{T(3) = 560\ (°C)}$

Antwort: In 300 Metern Entfernung beträgt die Temperatur 560 °C.

c) $P_1(0|1100)$
$P_2(300|560)$

$m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{560 - 1100}{300 - 0}$

$= \dfrac{-540}{300} = -1{,}8$

$\Rightarrow -1{,}8 \cdot 100 = -180\ °C/m$

Antwort: Im Mittel verringert sich die Temperatur mit jedem Meter Entfernung um 180 °C.

$T(4) = 10 \cdot 4^3 - 90 \cdot 4^2 + 1100$
$T(4) = 300$

$T(5) = 10 \cdot 5^3 - 90 \cdot 5^2 + 1100$
$T(5) = 100$

$m_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{100 - 300}{5 - 4} = \dfrac{-200}{1}$

$= -200$

Antwort: Im Mittel verringert sich die Temperatur mit jedem Meter Entfernung um 180 °C.

d) $T'(x) = 30x^2 - 180x$
$T'(3) = 30 \cdot 3^2 - 180 \cdot 3$
$T'(3) = -270$

Antwort: Die lokale Temperaturveränd. beträgt bei einer Entfernung von 300 m genau −270 °C

$f'(x) = 6x + 5$

$$\boxed{f(x) = 3x^2 + 5x - 2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 \cdot (x+h)^2 + 5 \cdot (x+h) - 2 - (3x^2 + 5x - 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 \cdot (x^2 + 2xh + h^2) + 5 \cdot (x+h) - 2 - (3x^2 + 5x - 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3x^2} + 6xh + 3h^2 + \cancel{5x} + 5h \cancel{-2} \cancel{-3x^2} \cancel{-5x} \cancel{+2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2 + 5h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot (6x + 3h + 5)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6x + 3h + 5) = 6x + 3 \cdot 0 + 5 = 6x + 5 = f'(x)$$

Themen Klassenarbeit:

- Tangenten und Normalen
- h-Methode
- lokale vs. mittlere Steigung
- Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen
- Extremalprobleme

$\boxed{\text{MG 04}}$

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
0	1	0	0	0	2	4	4	3	2	2	3	1	0	2	1

$\varnothing = 8{,}36$

Übungen

2. Punktprobe

Liegen die Punkte P und Q auf f?

a) $f(x) = 9 \cdot 1{,}5^x$, $P(-2|4)$, $Q(2|20)$

b) $f(x) = 4 \cdot 0{,}5^x$, $P(3|0{,}25)$, $Q(-2|16)$

c) $f(x) = \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $P\left(3\middle|\frac{1}{8}\right)$, $Q(-2|20{,}25)$

d) $f(x) = 1{,}6 \cdot 0{,}8^x$, $P(2|2{,}5)$, $Q\left(-3\middle|\frac{25}{8}\right)$

$4 = 9 \cdot \boxed{1{,}5^{-2}}$

$4 = 9 \cdot \frac{4}{9}$

$4 = 4$ ✓

☺

$\Rightarrow$ P liegt auf der Kurve von f.

3. Umkehrwerte

Bestimmen Sie die Stelle x, an welcher die Funktion f den Wert y annimmt.

a) $f(x) = 2 \cdot 4^x$, $y = 4$

b) $f(x) = 0{,}2 \cdot 5^x$, $y = 25$

c) $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$, $y = 4{,}5$

$4 = 2 \cdot 4^x \quad | :2$

$2 = 4^x \quad | \ln$

$\ln(2) = \ln(4^x)$

$\ln(2) = x \cdot \ln(4) \quad | :\ln(4)$

$\frac{\ln(2)}{\ln(4)} = x$

$0{,}5 = x$

4. Schnittpunkte

Wo schneiden sich f und g?

a) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$, $g(x) = \frac{1}{27} \cdot 9^x$

b) $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

7. Rek…

Prüf… die T… derg… tion… Wan…

Tab…

x	
f(x)	

Tab…

x	
f(x)	

Tab…

x	
f(x)	

8. Ein…

---

4. Schnittpunkte

Wo schneiden sich f und g?

a) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$, $g(x) = \frac{1}{27} \cdot 9^x$

b) $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$, $g(x) = 6 \cdot 3^x$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{3^2}{4^2}} = \frac{9}{16}$$

a)

$\frac{1}{3} \cdot 3^x = \frac{1}{27} \cdot 9^x \quad | \cdot 27$

$9 \cdot 3^x = 9^x \quad | :(3^x)$

$9 = \frac{9^x}{3^x}$

$9 = \left(\frac{9}{3}\right)^x$

$9 = 3^x \quad | \ln$

$\ln(9) = \ln(3^x)$

$\ln(9) = x \cdot \ln(3) \quad | :\ln(3)$

$\frac{\ln(9)}{\ln(3)} = x$

$\underline{\underline{2 = x}}$

$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 3^2$

$f(2) = 3$

$\Rightarrow \underline{\underline{S(2|3)}}$

b)

$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad | :2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad | :\left(\frac{1}{4}\right)^x$

$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{4}\right)^x} = 8$

$\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}\right)^x = 8$

$2^x = 8 \quad | \ln$

$\ln(2^x) = \ln(8)$

$x \cdot \ln(2) = \ln(8) \quad | :\ln(2)$

$x = \frac{\ln(8)}{\ln(2)}$

$x = 3$

$f(3) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$f(3) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(3\middle|\frac{1}{4}\right)}}$

c)

$$\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = 6\cdot 3^{x}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x}} = 6\cdot 3^{x} \quad \Big|\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1\cdot\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{x}}}{\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{x}}} = 6\cdot 3^{x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$$

$$\frac{3}{2} = 6\cdot 3^{x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \quad \Big|:6$$

$$0{,}25 = 3^{x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$$

$$0{,}25 = \left(3\cdot\frac{2}{3}\right)^{x}$$

$$0{,}25 = 2^{x} \quad \big|\ln$$

$$\ln(0{,}25) = x\cdot\ln(2) \quad \big|:\ln(2)$$

$$\frac{\ln(0{,}25)}{\ln(2)} = x$$

$$\underline{\underline{-2 = x}}$$

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a^{1}}}$$

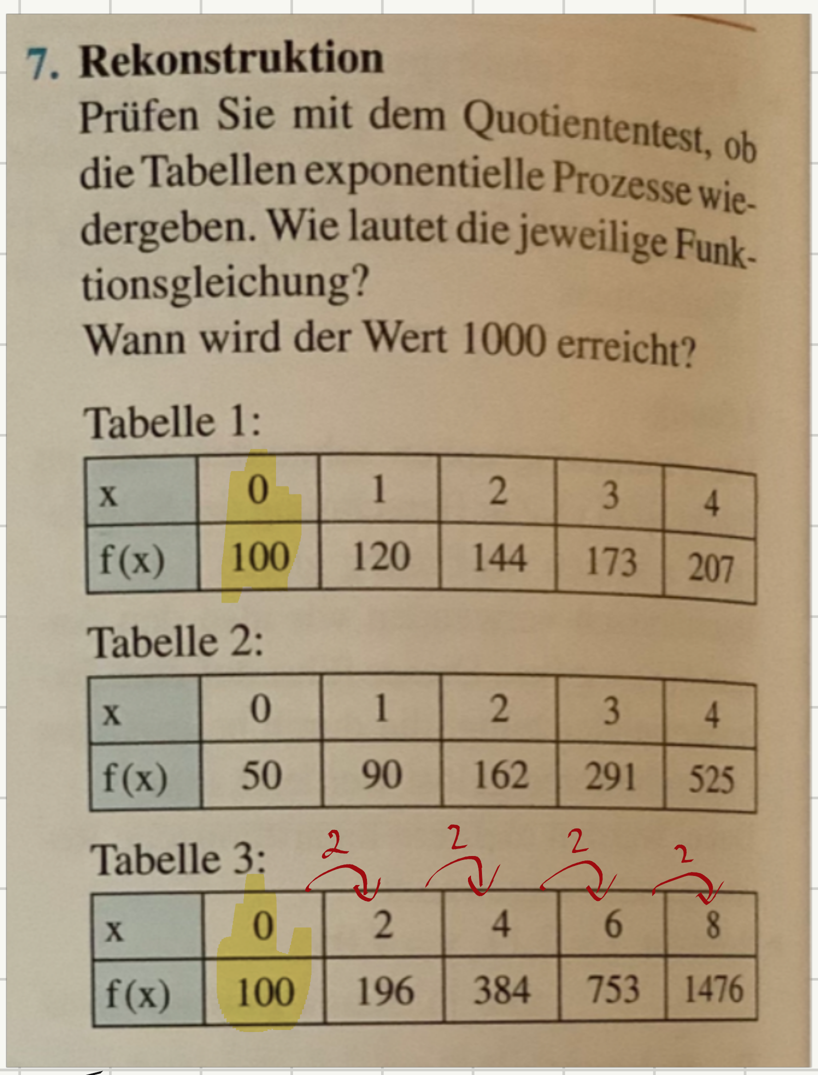
Bsp.: $17^{-4} = \frac{1}{17^{4}}$

$$\boxed{(3\cdot 4)^{2} = 3^{2}\cdot 4^{2}}$$

$$g(-2) = 6\cdot 3^{-2}$$

$$g(-2) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(-2\,\middle|\,\frac{2}{3}\right)}}$$



7. Rekonstruktion
Prüfen Sie mit dem Quotiententest, ob die Tabellen exponentielle Prozesse wiedergeben. Wie lautet die jeweilige Funktionsgleichung?
Wann wird der Wert 1000 erreicht?

Tabelle 1:

x	0	1	2	3	4
f(x)	100	120	144	173	207

Tabelle 2:

x	0	1	2	3	4
f(x)	50	90	162	291	525

Tabelle 3:

x	0	2	4	6	8
f(x)	100	196	384	753	1476

Tabelle 1

$$a_1 = \frac{120}{100} = 1{,}2$$

$$a_2 = \frac{144}{120} = 1{,}2$$

$$a_3 = \frac{173}{144} \approx 1{,}20139$$

$$a_4 = \frac{207}{173} \approx 1{,}1965$$

$$\boxed{a = \sqrt[\text{Sprungweite}]{\frac{\text{Nachfolger}}{\text{Vorgänger}}}}$$

Sprungweite

Funktion:

Startwert: $c = 100$ (da hier $x=0$)

Wachstumsfakt.: $a = 1{,}2$

$$\underline{\underline{f(x) = 100\cdot 1{,}2^{x}}}$$

Tabelle 3

$$a_1 = \sqrt[2]{\frac{196}{100}} = 1{,}4$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{384}{196}} \approx 1{,}3997$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{753}{384}} \approx 1{,}4003$$

$$a_4 = \sqrt{\frac{1476}{753}} \approx 1{,}40006$$

Funktion:

$c = 100$ (da hier $x=0$)

$a = 1{,}4$

$$\underline{\underline{f(x) = 100\cdot 1{,}4^{x}}}$$

5. Rekonstruktionen
Die Funktion $f(x) = c \cdot a^x$ geht durch die Punkte P und Q. Bestimmen Sie a und c.
a) $P(-1|4)$, $Q(0|0{,}25)$
b) $P(-1|6)$, $Q(1|24)$
c) $P(-2|16)$, $Q(2|1)$

a)

x	−1	0
f(x)	4	0,25

↯ Punkte in Tabelle in aufsteigender Reihenfolge bezüglich der x-Werte sortieren

x	~~0~~	~~−1~~
f(x)	~~0,25~~	~~4~~

$a = \frac{\text{Nachf.}}{\text{Vorg.}} = \frac{0{,}25}{4} = 0{,}0625$

$c = 0{,}25$
(da hier x=0)

$f(x) = 0{,}25 \cdot 0{,}0625^x$

b)

x	−1	1
f(x)	6	24

2

$a = \sqrt[2]{\frac{\text{Nachf.}}{\text{Vorg.}}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$

c = ?
Es gibt leider keinen Punkt mit x=0, daher muss c berechnet werden.

$\boxed{f(x) = c \cdot a^x}$

$24 = c \cdot 2^1$

$24 = c \cdot 2 \quad |:2$

$12 = c$

$f(x) = 12 \cdot 2^x$

c)

x	−2	2
f(x)	16	1

$a = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = 0{,}5$

$f(x) = c \cdot a^x$

$1 = c \cdot 0{,}5^2$

$1 = c \cdot 0{,}25 \quad | :0{,}25$

$4 = c$

$f(x) = 4 \cdot 0{,}5^x$

6. Bakterienwachstum $c = 200$ $c = 400$

Zwei Bakterienpopulationen I und II bestehen zu Beobachtungsbeginn aus 200 bzw. aus 400 Bakterien. Population I vermehrt sich um 16% am Tag, Population II nur um 12%.

a) Wie groß sind die Bestände nach 10 Tagen?

b) Wann haben die Bestände die Größe 1000 erreicht?

c) Wann sind die Bestände gleich stark?

$$\boxed{\begin{aligned} f_I(x) &= 200 \cdot 1{,}16^x \\ f_{II}(x) &= 400 \cdot 1{,}12^x \end{aligned}}$$

a) $f_I(10) = 200 \cdot 1{,}16^{10} \approx 882{,}29$

$f_{II}(10) = 400 \cdot 1{,}12^{10} \approx 1242{,}34$

b) I: $1000 = 200 \cdot 1{,}16^x$

$5 = 1{,}16^x \quad | \ln$

$\ln(5) = x \cdot \ln(1{,}16) \quad | : \ln(1{,}16)$

$\frac{\ln(5)}{\ln(1{,}16)} = x$

$\underline{\underline{10{,}84 \approx x}}$

Antwort: ....

II: $1000 = 400 \cdot 1{,}12^x$

$2{,}5 = 1{,}12^x \quad | \ln$

$\ln(2{,}5) = x \cdot \ln(1{,}12) \quad | : \ln(1{,}12)$

$\frac{\ln(2{,}5)}{\ln(1{,}12)} = x$

$\underline{\underline{8{,}09 \approx x}}$

c) Schnittpunkt?

→ gleichsetzen:

$200 \cdot 1{,}16^x = 400 \cdot 1{,}12^x \quad | : 200$

$1{,}16^x = 2 \cdot 1{,}12^x \quad | : 1{,}12^x$

$\frac{1{,}16^x}{1{,}12^x} = 2$

$\left(\frac{1{,}16}{1{,}12}\right)^x = 2 \quad | \ln$

$x \cdot \ln\left(\frac{1{,}16}{1{,}12}\right) = \ln(2) \quad | : \ln\left(\frac{1{,}16}{1{,}12}\right)$

$x = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{1{,}16}{1{,}12}\right)}$

$\underline{\underline{x \approx 19{,}75}}$

Antwort: Nach etwa 20 Tagen sind die Bakteien-populationen gleich stark.

8. Ein Abnahmeprozess

20 000 Eisbären leben rund um den Nordpol. Sie sind zu Symbolen für die Gefahren des Klimawandels geworden. Es wurde festgestellt, dass die Population kleiner wird und um 1 % jährlich schrumpft. Wir nehmen einmal an, dass die Population sich nach der folgenden Formel entwickelt:
$N(t) = c \cdot a^t$ (t in Jahren).

a) Wie lautet die Gleichung von N?
b) Um welche Zahl nimmt die Population in den ersten beiden Jahren ab?
c) Wann beträgt die Zahl der Bären nur noch 15 000?

a) $N(t) = 20\,000 \cdot 0{,}99^x$

b) $N(2) = 20\,000 \cdot 0{,}99^2$
$N(2) = 19\,602$

$20\,000$
$-\,19\,602$
$=\ 398$

Antwort: In den ersten beiden Jahren schrumpft die Population um fast 400 Eisbären.

c) $15\,000 = 20\,000 \cdot 0{,}99^x \quad | : 20\,000$
$0{,}75 = 0{,}99^x \quad | \ln$
$\ln 0{,}75 = x \cdot \ln(0{,}99) \quad | : \ln(0{,}99)$
$\frac{\ln(0{,}75)}{\ln(0{,}99)} = x$
$28{,}6 \approx x$

Antwort: Nach etwas mehr als $28\frac{1}{2}$ Jahren sinkt die Population unter 15.000 Tiere.

8. Luftdruck

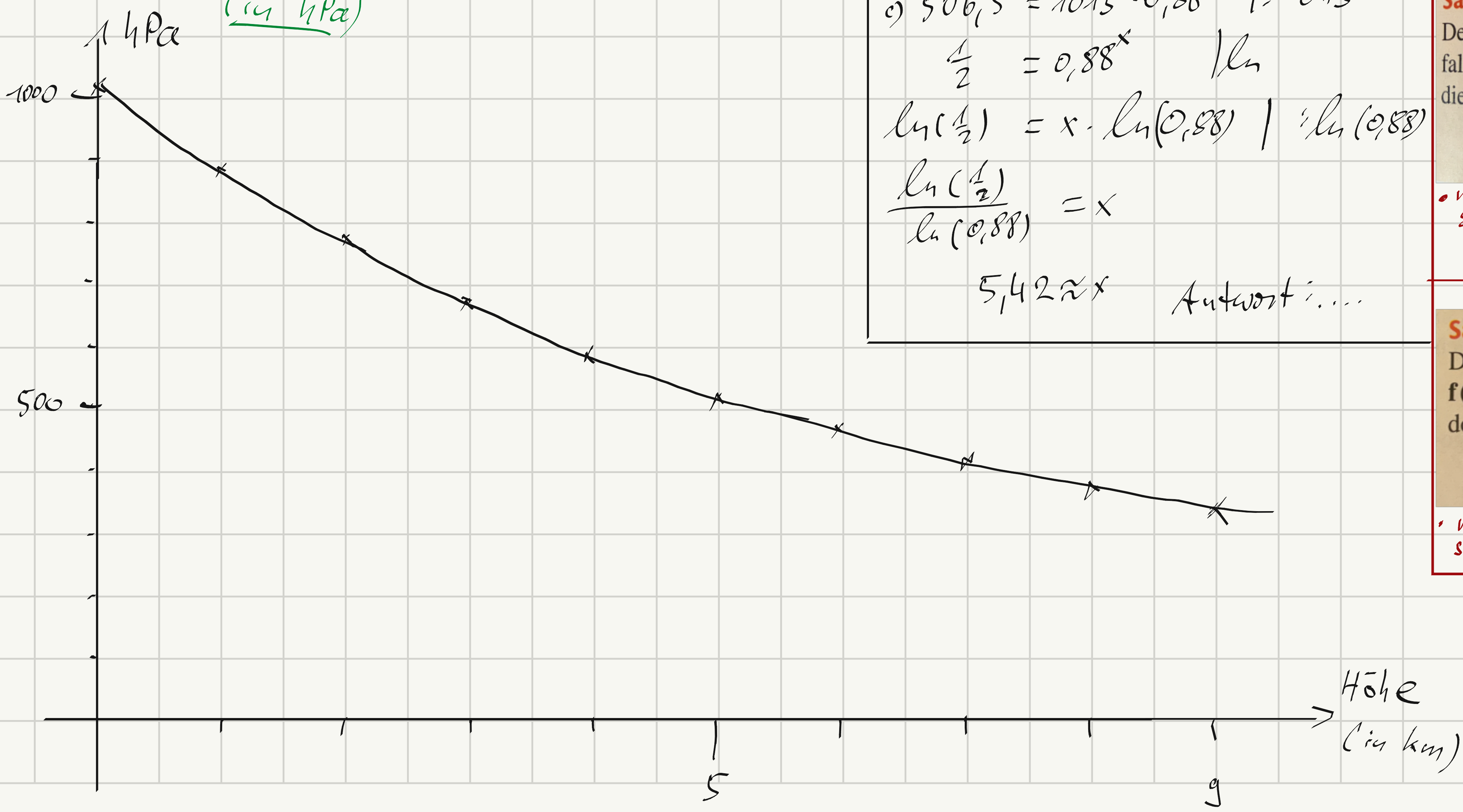
Der Luftdruck nimmt mit steigender Höhe über dem Meeresspiegel exponentiell um etwa 12 % pro Kilometer ab. In Meereshöhe herrscht ein Luftdruck von ca. 1013 hPa.

a) Geben Sie eine Funktion an, die die Druckabnahme modelliert. Zeichnen Sie den Graphen.
b) Berechnen Sie den Luftdruck auf der Zugspitze (3000 m) und dem Mount Everest (8900 m).
c) Wie viele Meter muss man steigen, bis sich der Luftdruck halbiert hat?
d) Der Mensch kann einen Luftdruck bis hinunter zu 400 mbar aushalten. Bis zu welcher Höhe kann ein Mensch ohne Atemmaske aufsteigen?

a) $f(x) = 1013 \cdot 0{,}88^x$

Höhe (in km)

Luftdruck (in hPa)



b) Zugspitze 3000 m $\hat{=}$ 3
Everest 8900 m $\hat{=}$ 8,9

$f(3) = 1013 \cdot 0{,}88^3$
$f(3) \approx 690{,}3$ (hPa)

$f(8{,}9) = 1013 \cdot 0{,}88^{8{,}9}$
$f(8{,}9) \approx 324{,}7$ (hPa)

Antwort: ...

c) $506{,}5 = 1013 \cdot 0{,}88^x \quad | : 1013$
$\frac{1}{2} = 0{,}88^x \quad | \ln$
$\ln(\frac{1}{2}) = x \cdot \ln(0{,}88) \quad | : \ln(0{,}88)$
$\frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(0{,}88)} = x$
$5{,}42 \approx x$ Antwort: ...

d) $400 = 1013 \cdot 0{,}88^x \quad | : 1013$
$\frac{400}{1013} = 0{,}88^x \quad | \ln$
$\ln(\frac{400}{1013}) = x \cdot \ln(0{,}88)$
$\frac{\ln(\frac{400}{1013})}{\ln(0{,}88)} = x$
$7{,}27 \approx x$

Satz IV.3 Halbwertszeit
Der exponentielle Abnahme- bzw. Zerfallsprozess $f(t) = c \cdot a^t$ $(0 < a < 1)$ hat die Halbwertszeit
$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log a}.$$

- nur bei Zerfallsprozessen sinnvoll!

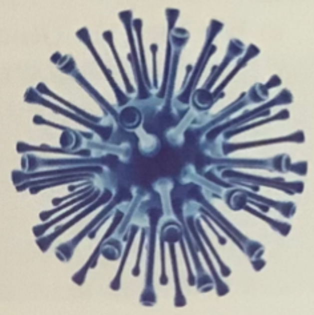
Satz IV.4 Verdoppelungszeit
Der exponentielle Wachstumsprozess $f(t) = c \cdot a^t$ mit $a > 1$ besitzt die Verdoppelungszeit
$$T_2 = \frac{\log 2}{\log a}.$$

- nur bei Wachstumsprozessen sinnvoll!

S. 213:

7. Influenza

Die gefürchtete *Influenza* unterscheidet sich vom relativ harmlosen grippalen Infekt durch schlagartigen Beginn mit 40 °C Fieber und schwerem Krankheitsgefühl. Der Influenzaerreger kann sich nämlich in den Atemwegen aufgrund einer raffinierten Strategie explosionsartig verbreiten. Innerhalb von 6 Stunden entwickeln sich aus einem Virus 1500 neue Viren.



a) Wie lautet das Wachstumsgesetz, wenn die Infektion durch 100 Erreger verursacht wird?

b) Wann übersteigt die Anzahl der Erreger die Millionen- bzw. die Milliardengrenze?

c) Wie groß ist die Verdopplungszeit des Prozesses?

(7) a)

t	0	6
f(t)	1	1500

$a = \sqrt[6]{\frac{1500}{1}} \approx 3{,}383$

$c = 100$

$\underline{f(t) = 100 \cdot 3{,}383^t}$

b) $1.000.000 = 100 \cdot 3{,}383^t$

$10.000 = 3{,}383^t \quad | \ln$

$\ln(10.000) = t \cdot \ln(3{,}383)$

$\frac{\ln(10.000)}{\ln(3{,}383)} = t$

$7{,}56 \approx t$

$1000.000.000 = 100 \cdot 3{,}383^t$

$10.000.000 = 3{,}383^t \quad | \ln$

$\ln(10.000.000) = t \cdot \ln(3{,}383) \quad | : \ln(3{,}383)$

$\frac{\ln(10.000.000)}{\ln(3{,}383)} = t$

$13{,}22 \approx t$

Antwort: Nach etwa 7,5 Stunden existieren 1 Mio. Vieren - nach etwa 13,2 Stunden existieren bereis 1 Mrd. Viren.

nur bei exponentiellem Wachstum

nur bei exponentiellem Zerfall

c) $200 = 100 \cdot 3{,}383^t \quad | : 100$

$2 = 3{,}383^t \quad | \ln$

$\ln(2) = t \cdot \ln(3{,}383) \quad | : \ln(3{,}388)$

$\frac{\ln(2)}{\ln(3{,}383)} = t$

$\underline{0{,}569 \approx t}$

oder mit der Formel

$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$

siehe S. 208

Halbwertszeit

$T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$

siehe S. 207

Antwort: Die Verdopplungszeit beträgt etwas mehr als eine halbe Stunde.

---

8. Luftdruck

Der Luftdruck nimmt mit steigender Höhe über dem Meeresspiegel exponentiell um etwa 12 % pro Kilometer ab. In Meereshöhe herrscht ein Luftdruck von ca. 1013 hPa.

a) Geben Sie eine Funktion an, die die Druckabnahme modelliert. Zeichnen Sie den Graphen.

b) Berechnen Sie den Luftdruck auf der Zugspitze (3000 m) und dem Mount Everest (8900 m).

c) Wie viele Meter muss man steigen, bis sich der Luftdruck halbiert hat?

d) Der Mensch kann einen Luftdruck bis hinunter zu 400 mbar aushalten. Bis zu welcher Höhe kann ein Mensch ohne Atemmaske aufsteigen?

a) $a = 0{,}88$

$c = 1013$

$\boxed{f(x) = 1013 \cdot 0{,}88^x}$

b) Zugspitze: $x = 3$ | $f(3) = 1013 \cdot 0{,}88^3 \approx \underline{690{,}3}$ (hPa)

Everest: $x = 8{,}9$ | $f(8{,}9) = 1013 \cdot 0{,}88^{8,9} \approx 324{,}7$ (hPa)

Antwort: ---

c) $\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(0{,}88)} \approx 5{,}42 \mathrel{\hat{=}} \underline{5420 \text{ Höhenmeter}}$

Antwort: Erst bei einer Höhe von etwa 5.400 m hat sich der Luftdruck, der an der Küste herrscht, halbiert.

d) $\boxed{1 \text{ mbar} \mathrel{\hat{=}} 1 \text{ hPa}}$

$400 = 1013 \cdot 0{,}88^x \quad | : 1013$

$\frac{400}{1013} = 0{,}88^x \quad | \ln$

$\frac{\ln(\frac{400}{1013})}{\ln(0{,}88)} = x$

$x \approx 7{,}27 \mathrel{\hat{=}} 7.270$ Höhenmeter

Antwort: Ab einer Höhe von etwa 7.200 Metern wird es für den Menschen lebensgefährlich, was den Luftdruck anbetrifft.

9. Alkoholgehalt
Ein Autofahrer fährt in den Graben. Er entfernt sich von der Unfallstelle. Fünf Stunden später wird eine Blutprobe genommen. Der Alkoholgehalt beträgt 0,7 Promille. Eine weitere Stunde später ist er auf 0,6 Promille gefallen. Wie viele Promille hatte der Mann zur Unfallzeit, wenn man exponentielle Abnahme unterstellt? Wie viele Promille wären es bei linearer Abnahme?

Stunden (h)	5	6
Akoholspiegel (S)	0,7	0,6

exponentiell:

$$a = \frac{\text{Nachfolger}}{\text{Vorgänger}} = \frac{0{,}6}{0{,}7} \approx 0{,}857$$

c:

$$\boxed{s(h) = c \cdot a^h}$$

$$s(h) = c \cdot 0{,}857^h$$

$$0{,}7 = c \cdot 0{,}857^5$$

$$0{,}7 \approx 0{,}4623 \cdot c \quad |:0{,}4623$$

$$\underline{1{,}51 \approx c}$$

linear:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}6 - 0{,}7}{6 - 5}$$

$$= \frac{-0{,}1}{1} = \underline{\underline{-0{,}1}}$$

$$\boxed{g(x) = m \cdot x + b}$$

$$0{,}7 = -0{,}1 \cdot 5 + b$$

$$0{,}7 = -0{,}5 + b \quad |+0{,}5$$

$$\underline{1{,}2 = b}$$

Antwort: Geht man von einem exponentiellen Modell aus, hatte der Fahrer zum Unfallzeitpunkt einen Alkoholspiegel von etwa 1,5 Promille, während sich bei einem linearen Modell ein Wert von nur 1,2 Promille ergibt.

---

10. Helligkeit unter Wasser
Die Helligkeit nimmt mit zunehmender Wassertiefe dramatisch ab, nämlich exponentiell. In 16 Metern Tiefe sind nur noch 15 % der Lichtmenge übrig.
a) Geben Sie eine Funktion an, welche den Prozentsatz der Lichtes in Abhängigkeit von der Tauchtiefe beschreibt (Oberfläche: 100 %).
b) In welcher Tiefe ist ein Taucher, dessen Belichtungsmesser nur 0,1 % des Tageslichtes misst?

a)

X	Tiefe (m)	0	16
f(x)	Lichtmenge (%)	100	15

$$a = \sqrt[16]{\frac{15}{100}} \approx 0{,}888$$

Lichtstärke (%) → $\underline{\underline{f(x) = 100 \cdot 0{,}888^x}}$ ← Tauchtiefe (m)

b)

$$0{,}1 = 100 \cdot 0{,}888^x \quad |:100$$

$$0{,}001 = 0{,}888^x \quad |\ln$$

$$\frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}888)} \approx 58{,}15 \text{ (m)}$$

Antwort: In einer Tauchtiefe von etwa 58 Metern herrscht nur noch eine Restlichtstärke von 0,1%.

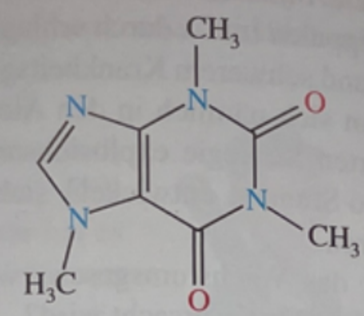
11. Koffein im Eistee

Eistee kann Koffeingehalte von bis zu 50 mg pro Glas besitzen. Bei einem Jugendlichen setzt die Wirkung nach einer Stunde ein. Sie nimmt dann mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden ab.

a) Wie lautet die Gleichung der Abnahmefunktion K? Skizzieren Sie den Graphen.

b) Die anregende Wirkung bleibt erhalten, solange noch 10 mg Koffein im Körper sind. Wie lange ist das der Fall?

c) Wie lange dauert der anregende Effekt, wenn die Person nach 4 Stunden ein weiteres Glas Eistee zu sich nimmt?



a)

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}}$$

$$3 = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} \quad | \cdot \ln(a)$$

$$3 \cdot \ln(a) = \ln(\tfrac{1}{2}) \quad | :3$$

$$\ln(a) = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{3} \quad | e^{\square}$$

$$e^{\ln(a)} = e^{\frac{\ln(\frac{1}{2})}{3}}$$

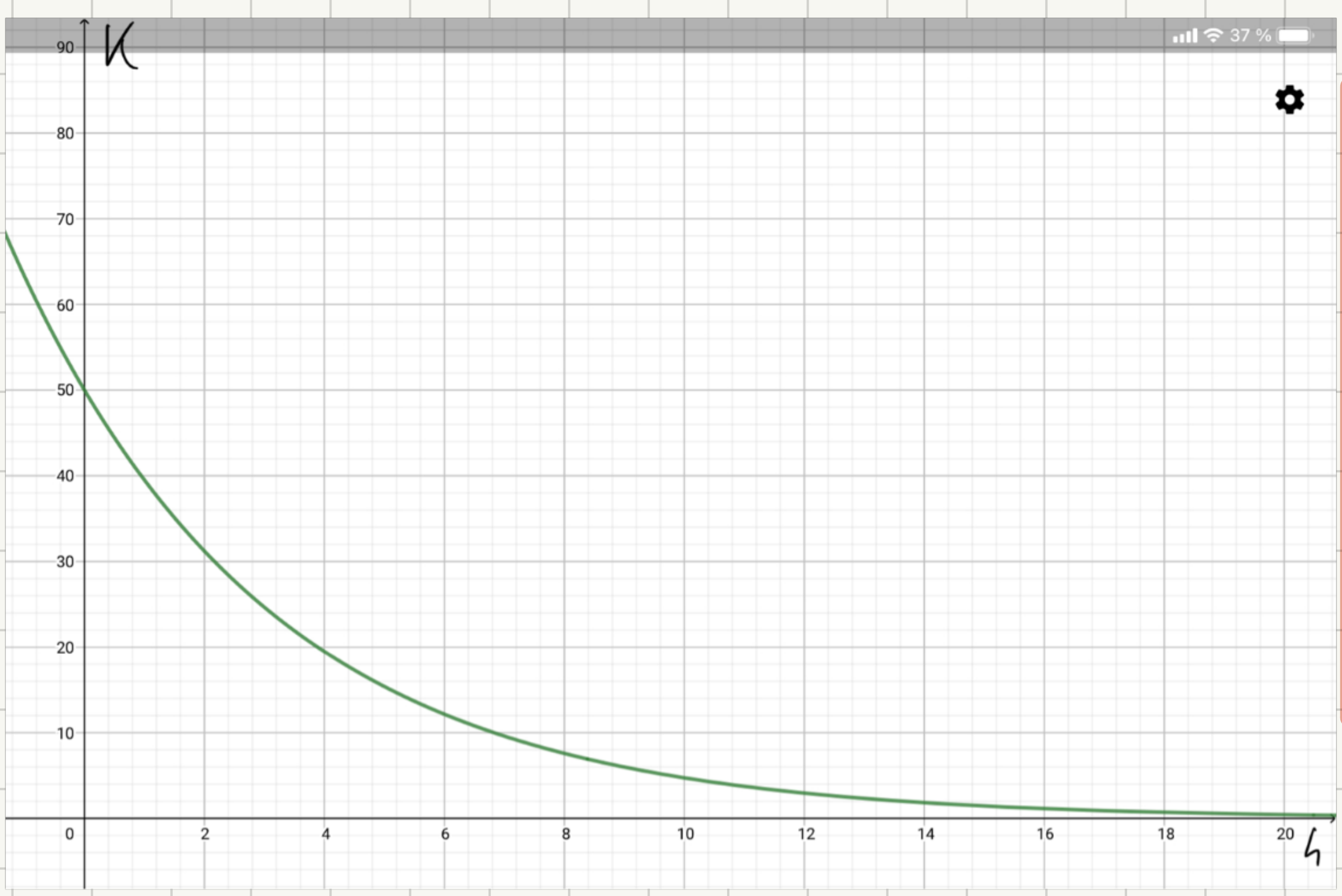
$$a = 0{,}79$$

$$c = 50$$

$$\Rightarrow \boxed{K(h) = 50 \cdot 0{,}79^h}$$

Stunden

mg



b)

$$10 = 50 \cdot 0{,}79^h \quad | :50$$

$$0{,}2 = 0{,}79^h \quad | \ln$$

$$\ln(0{,}2) = h \cdot \ln(0{,}79) \quad | : \ln(0{,}79)$$

$$\frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}79)} \approx 6{,}83$$

Antwort: Nach annähend 7 Stunden ist die Wirkung nicht mehr spürbar.

c) • Konzentration nach 4 Stunden: $K(4) = 50 \cdot 0{,}79^4 \approx 19{,}48$

neuer c-Wert

• 2. Glas: $19{,}48 + 50 = 69{,}48$

Wirksamkeitsgrenze

$$10 = 69{,}48 \cdot 0{,}79^h \quad | : 69{,}48$$

$$\frac{250}{1737} = 0{,}79^h \quad | \ln$$

$$\ln\left(\frac{250}{1737}\right) = h \cdot \ln(0{,}79) \quad | : \ln(0{,}79)$$

$$\frac{\ln(\frac{250}{1737})}{\ln(0{,}79)} = h$$

$$h \approx 8{,}22 \approx 8{,}5$$

Zeit total:

Phase 1: 4 Stunden

+Phase 2: 8,5 Stunden

12,5 Stunden

−Zeitverzögerung: −1 Stunde

11,5 Stunden

12. Taschengeld

Peter bekommt 10 € Taschengeld im Monat. Seine Eltern sehen ein, dass dieser Betrag für einen Jungen seines Alters nicht ausreicht. Seine Eltern erklären sich damit einverstanden, im kommenden Jahr das Taschengeld jeden Monat um 1,50 € zu erhöhen. Peter schlägt vor, sein Taschengeld jeden Monat um 10 % zu erhöhen.

a) Erfassen Sie für beide Varianten die Taschengeldzahlungen des Jahres tabellarisch.

b) Wie viel Taschengeld steht Peter bei beiden Varianten im gesamten Jahr zur Verfügung?

c) Angenommen, die Vereinbarung soll nicht nur für ein Jahr gelten, sondern bis zur Volljährigkeit von Peter in 2,5 Jahren. Wie viel Taschengeld würde er in beiden Varianten im letzten Monat vor der Volljährigkeit erhalten?

a) $g(x) = 1{,}5x + 10$

$f(x) = 10 \cdot 1{,}1^x$

Monat	g(x)	f(x)
0	10	10
1	11,5	11
2	13	12,1
3	14,5	13,31
4	16	14,64
5	17,5	16,11
6	19	17,72
7	20,5	19,49
8	22	21,44
9	23,5	23,58
10	25	25,94
11	26,5	28,53
12	28	31,39
b) Σ:	237	235,25

c) Wie viele Monate bis zum "letzten Monat vor der Volljährigkeit":

12
12
6
30
−1
29

$g(29) = 1{,}5 \cdot 29 + 10 = \underline{53{,}5\ €}$

$f(29) = 10 \cdot 1{,}1^{29} = \underline{158{,}63\ €}$

Antwort: ...

13. Immobilien

Ein 45-jähriger Anleger will 300 000 Euro zur Alterssicherung in einem Haus anlegen. Zwei Angebote kommen in die nähere Auswahl: Ein großes Haus in mittlerer Lage, dessen Wert jährlich um 20 000 Euro steigt, sowie ein kleineres Haus in guter Lage, dessen Wert jährlich um 4 % zunimmt. f und g seien die Funktionen, die den Wert der Häuser zur Zeit t beschreiben.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von f und g. Skizzieren Sie die Graphen von f und g für $0 \le t \le 30$ in einem Koordinatensystem.

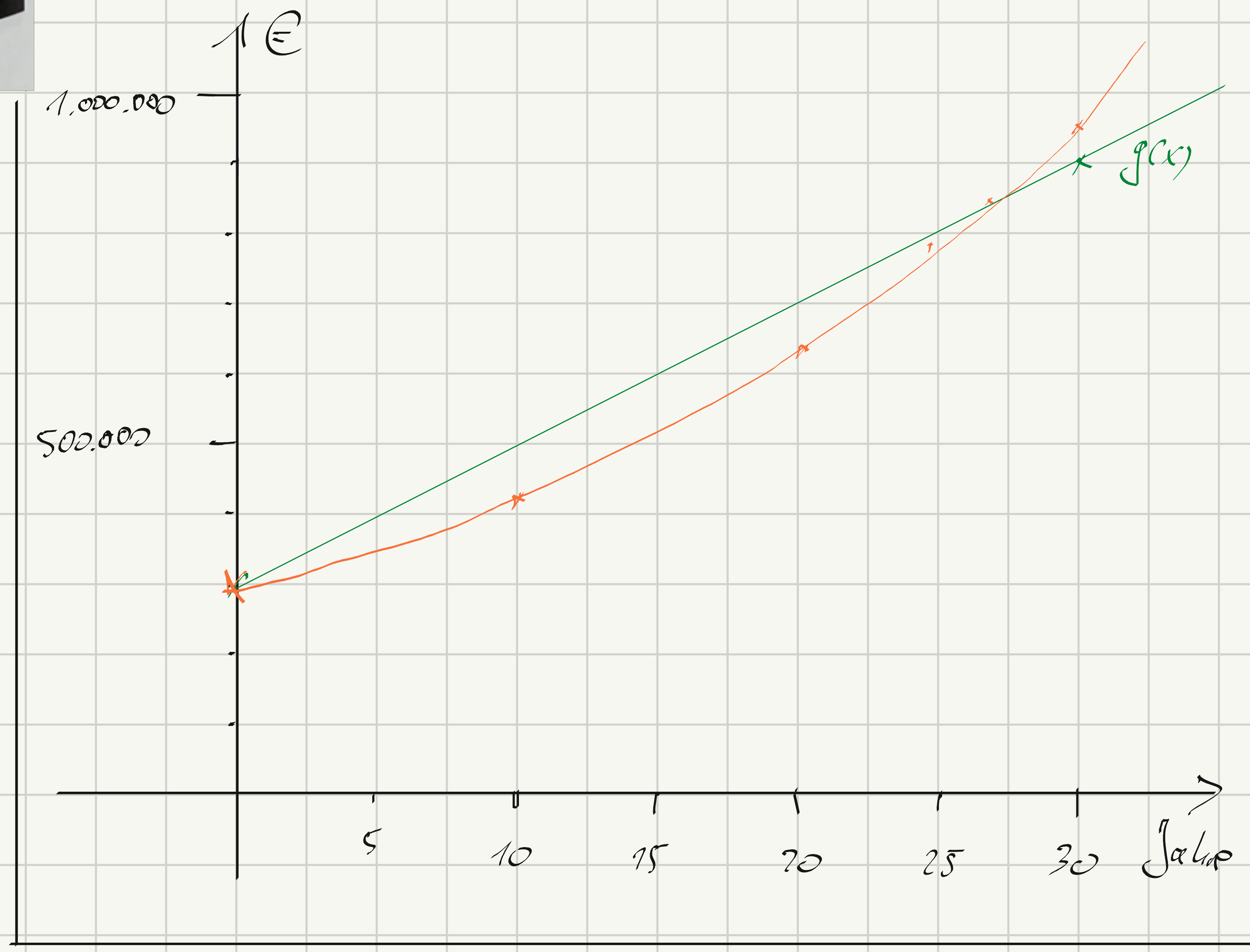
b) Wie sieht die Bilanz aus, wenn der Anleger mit 65 Jahren in den Ruhestand tritt?

c) Wann sind die Häuser etwa gleich viel wert?

d) Welchen jährlichen Wertzuwachs müsste das große Haus haben, wenn die Bilanz 30 Jahre lang günstiger sein soll als für das kleine Haus?

a) linear: groß: + 20.000 € jährlich
exponentiell: klein: + 4 % jährlich
Investitionsvolumen 300.000 €

linear: $g(x) = 20.000 \cdot x + 300.000$
exponentiell: $f(x) = 300.000 \cdot 1{,}04^x$



b) $g(20) = 20.000 \cdot 20 + 300.000$
$g(20) = 700.000$ (linear)

$f(20) = 300.000 \cdot 1{,}04^{20}$
$f(20) \approx 657.336{,}94$ (exp.)

Antwort: Zum Eintritt des Ruhestands ist das lineare Modell etwas vorteilhafter (+42.500 Euro).

c) Da die eine Funktion linear und die andere Funktion exponentiell ist, kann die Lösung nicht durch Gleichsetzen und anschließendes Auflösen berechnet werden.
—> zeichnerische Lösung oder Wertetabelle!

⇒ Laut Zeichnung (bzw. Wertetabelle) sind die beiden Häuser nach etwa 25 Jahren gleich viel wert.

d) $f(30) = 300.000 \cdot 1{,}04^{30}$

$f(30) \approx 973.019{,}25$ $\Rightarrow$ $P(30 \mid 973.019{,}25)$

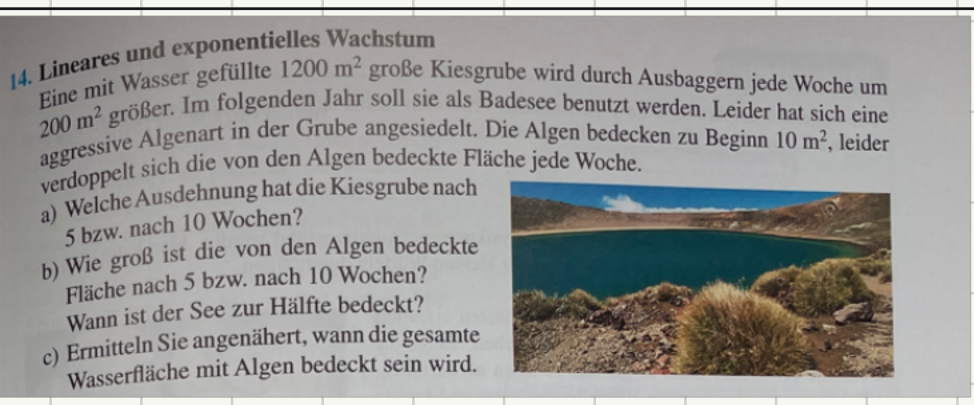
$f(x) = m \cdot x + 300.000$

$973.019{,}25 = m \cdot 30 + 300\,000 \quad | -300.000$

$673.019{,}25 = 30 \cdot m \quad | :30$

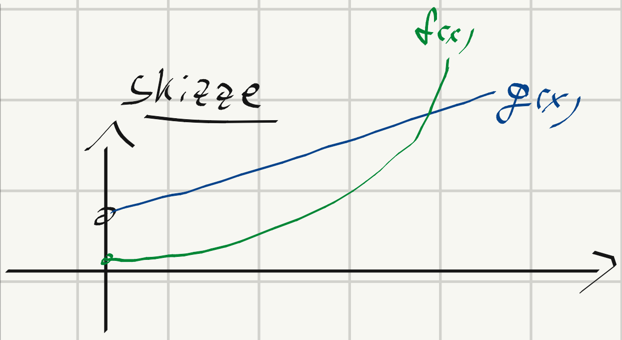
$22.433{,}98 \approx m$

Antwort: Bei einer jährlichen Zuwachsrate von genau 22.433,98 € sind beide Häuser nach genau 30 Jahren gleich viel wert.



14. **Lineares und exponentielles Wachstum**
Eine mit Wasser gefüllte 1200 m² große Kiesgrube wird durch Ausbaggern jede Woche um 200 m² größer. Im folgenden Jahr soll sie als Badesee benutzt werden. Leider hat sich eine aggressive Algenart in der Grube angesiedelt. Die Algen bedecken zu Beginn 10 m², leider verdoppelt sich die von den Algen bedeckte Fläche jede Woche.
a) Welche Ausdehnung hat die Kiesgrube nach 5 bzw. nach 10 Wochen?
b) Wie groß ist die von den Algen bedeckte Fläche nach 5 bzw. nach 10 Wochen? Wann ist der See zur Hälfte bedeckt?
c) Ermitteln Sie angenähert, wann die gesamte Wasserfläche mit Algen bedeckt sein wird.

Skizze



a) Fläche See: $g(x) = 200 \cdot x + 1200$

$g(5) = 200 \cdot 5 + 1200$

$g(5) = 2200$

$g(10) = 200 \cdot 10 + 1200$

$g(10) = 3200$

Antwort: ...

b) Fläche Algen: $f(x) = 10 \cdot 2^x$

$f(5) = 10 \cdot 2^5$

$f(5) = 320$

$f(10) = 10 \cdot 2^{10}$

$f(10) = 10.240$

Antwort: ...

---

b) (2. Teil) $\frac{1}{2} \cdot g(x) = f(x)$

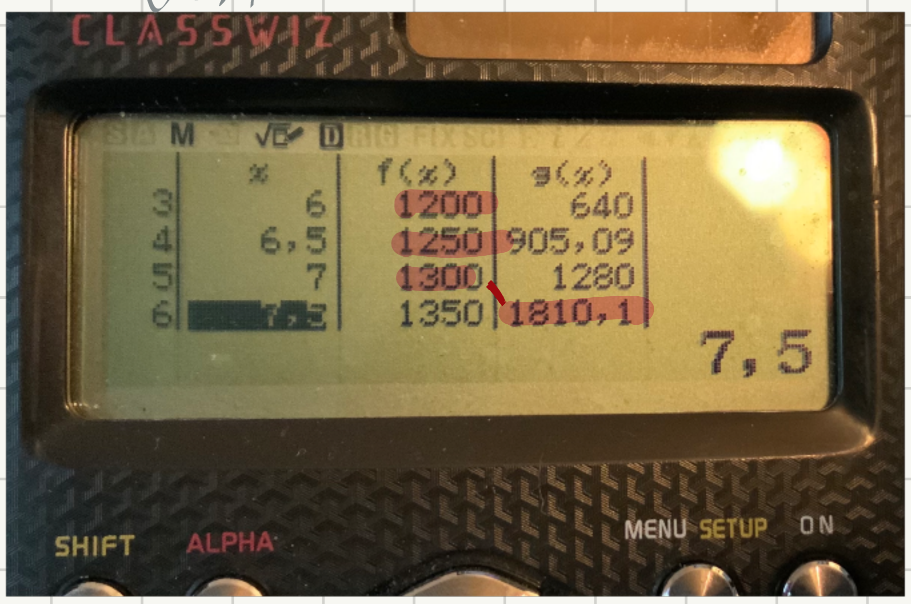
$\frac{1}{2} \cdot (200x + 1200) = 10 \cdot 2^x$

$\underbrace{100x + 600}_{f(x) \text{ in Wertetabelle}} = \underbrace{10 \cdot 2^x}_{g(x) \text{ in Wertetabelle}}$

Planung Wertetabelle

Start	5
End	10
Ink	0,5

Wertetabelle:



Antwort: Nach etwas mehr als 7 Wochen ist die Kiesgrube zur Hälfte mit Algen bedeckt.

c)

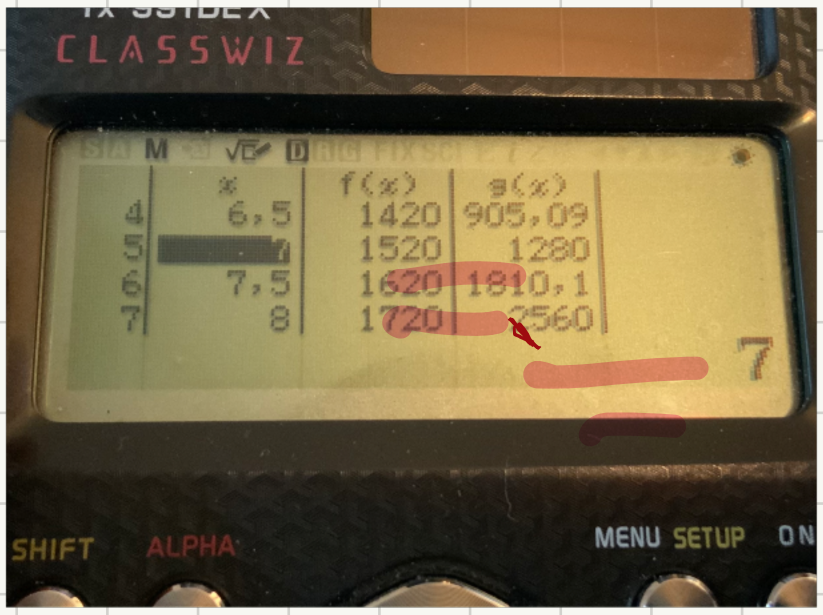
$g(x) = f(x)$

$\underbrace{200x + 120}_{f(x) \text{ in Wertetabelle}} = \underbrace{10 \cdot 2^x}_{g(x) \text{ in Wertetabelle}}$

Planung Wertetabelle

Start	5
End	10
Ink	0,5

Wertetabelle:



Antwort: Es dauert nicht einmal bis zur 8. Woche, bis der komplette See mit Algen bedeckt ist.

---

15. Schlafkur
Ein Kranker soll sich einer Schlafkur unterziehen. Zu Beginn erhält er zwei Tabletten, die zu einer Plasmakonzentration von 10 µg/ml führen. Nach zwei Stunden ist die Konzentration auf 8,5 µg/ml gesunken. Ist die Konzentration auf 5 µg/ml gesunken, so muss eine weitere Tablette genommen werden, um die Konzentration wieder auf den Ausgangswert zu erhöhen.

a) Wie lautet die Gleichung der Funktion, welche die Plasmakonzentration im ersten Einnahmeintervall beschreibt?
b) Welche Halbwertszeit hat das Medikament?
c) Der Patient vergisst nach der Erstdosis die Einnahme der Tablette. Wie tief sinkt die Plasmakonzentration bis zur folgenden Einnahme?

a)

t	0	2
$f(t)$	10	8,5

$a = \sqrt[2]{\frac{8,5}{10}} \approx 0,922$

$c = 10$

$f(t) = 10 \cdot 0,922^t$

b) $T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(0,922)} \approx 8,54$

Antwort: Alle 8,5 Stunden halbiert sich die Konzentration.

siehe auch ☺

c) Zeitspanne bis zur eigentlichen 1. Einnahme:

$5 = 10 \cdot 0,922^t \quad |:10$

$\frac{1}{2} = 0,922^t \quad |\ln$

$\ln(\frac{1}{2}) = t \cdot \ln(0,922) \quad |:\ln(0,922)$

$\boxed{\frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(0,922)} = t \quad 8,54 \approx t}$

$\Rightarrow$ Der Patient muss die Tablette eigentlich alle $8\frac{1}{2}$ Stunden einnehmen. Da er die erste Tablette vergisst, nimmt er erst nach $2 \cdot 8,5 = 17$ Stunden die nächste Dosis:

$f(17) = 10 \cdot 0,922^{17} \approx 2,51$

Antwort: Direkt vor der Einnahme besagter 2. Dosis hat der Patient noch eine Konzentration von etwa $2,5 \frac{\mu g}{ml}$ im Blut.

16. Hast Du schon gehört …

An einer Schule mit 1000 Schülern wird pünktlich um 8 Uhr das Gerücht gestreut, dass es eine Woche Ferienverlängerung gibt. Das Gerücht verbreitet sich nach der Formel $N(t) = b - ca^t$, d.h. der Formel für *begrenztes exponentielles Wachstum*.

Hierbei ist $a = 0{,}8$, $c = 995$ und $b = 1000$ (t in Stunden, N(t) in Personen).

a) Zeichnen Sie die Wachstumsfunktion für das Intervall $0 \le t \le 9$ (8 Uhr: $t = 0$). Welche Bedeutung haben die Parameter a, b und c?

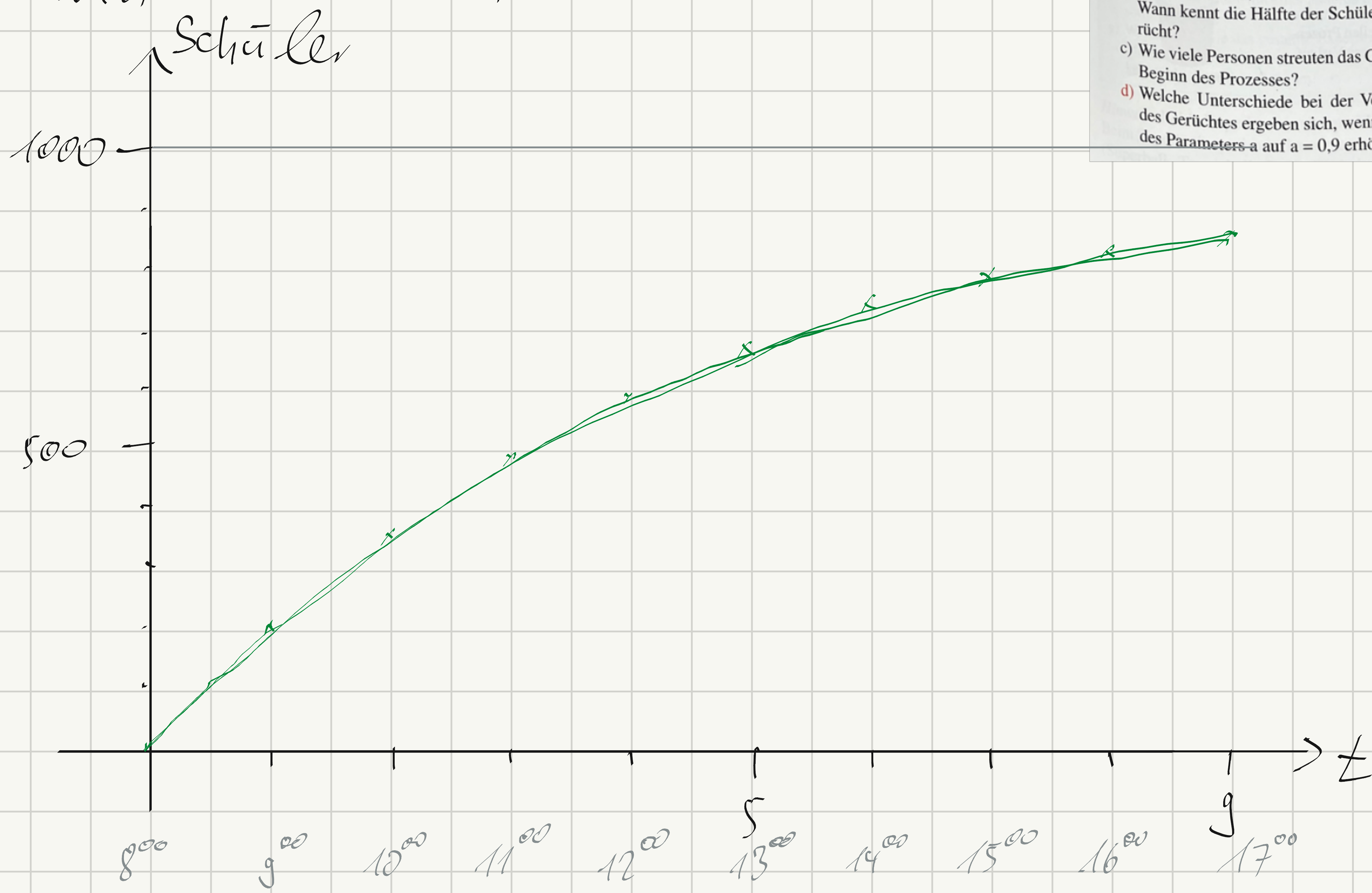
b) Wie viele Schüler kennen das Gerücht schon um 9 Uhr, um 12 Uhr, um 17 Uhr? Wann kennt die Hälfte der Schüler das Gerücht?

c) Wie viele Personen streuten das Gerücht zu Beginn des Prozesses?

d) Welche Unterschiede bei der Verbreitung des Gerüchtes ergeben sich, wenn der Wert des Parameters a auf $a = 0{,}9$ erhöht wird?

a) $N(t) = b - c \cdot a^t$

$N(t) = 1000 - 995 \cdot 0{,}8^t$



b) $9^{00}: t = 1 \qquad N(1) = 1000 - 995 \cdot 0{,}8^1 = \underline{204}$

$12^{00}: t = 4 \qquad N(4) = 1000 - 995 \cdot 0{,}8^4 = 592{,}448$

$17^{00}: t = 9 \qquad N(9) = 1000 - 995 \cdot 0{,}8^9 \approx \underline{866{,}45}$

Halbierungszeit:

$$500 = 1000 - 995 \cdot 0{,}8^t \quad | -1000$$
$$-500 = -995 \cdot 0{,}8^t \quad | :(-1)$$
$$500 = 995 \cdot 0{,}8^t \quad | :995$$
$$\frac{100}{199} = 0{,}8^t \quad | \ln$$
$$\ln\left(\frac{100}{199}\right) = t \cdot \ln(0{,}8) \quad | :\ln(0{,}8)$$
$$\frac{\ln\left(\frac{100}{199}\right)}{\ln(0{,}8)} = t$$
$$\underline{\underline{3{,}08 \approx t}}$$

Antwort: …

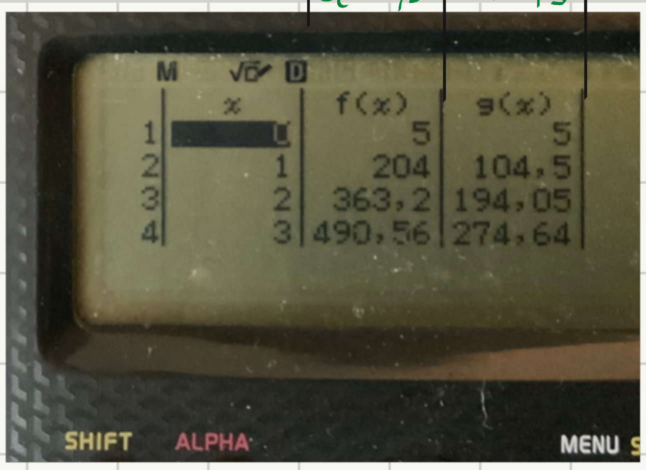
↯

Hier geht die Formel für die Halbwertszeit nicht, da hier ja ein anderes Modell vorliegt!

c) $\boxed{t=0}$ $N(0) = 1000 - 995 \cdot 0{,}8^{0} = 5$ Antwort: ...

d)

$a=0{,}8$ $a=0{,}9$



	x	f(x)	g(x)
1	0	5	5
2	1	204	104,5
3	2	363,2	194,05
4	3	490,56	274,64

Wie man schon den ersten Einträgen in der Wertetabelle entnehmen kann, wächst die Kurve mit dem a-Wert 0,9 langsamer an. Das Gerücht verbreitet sich als langsamer, je höher der a-Wert ist.

Begründung: Bei einer Erhöhung des Wertes „a“ zerfällt die Menge der noch nicht infizierten Schüler*innen weniger langsamer als bei einem geringeren „a“-Wert. Ein Abbremsen des Zerfalls der Gruppe der bislang Nicht-Infizierten bremst somit zwangsläufig auch das Wachstum des Gerüchts im Ganzen betrachtet.

$N(t) = 1000 - 995 \cdot 0{,}8^{t}$

Menge der noch nicht infizierten Schüler

Zerfallsfaktor für die Menge der noch nicht infizierten Schüler

Satz IV.1 Logarithmengesetze

a und b seien positive reelle Zahlen.
r sei eine beliebige reelle Zahl.
Dann gelten folgende Gesetze:

(1) $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

(2) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

(3) $\log(a^r) = r \cdot \log a$

Satz IV.2

Operation und Umkehroperation:

(4) $\log 10^x = x$

(5) $10^{\log x} = x$

Besondere Zehnerlogarithmen:

$\log 10 = 1, \log 1 = 0$

1 a) $3^{2x+1} = 243 \quad | \ln$

$\ln(3^{2x+1}) = \ln(243)$

$(2x+1) \cdot \ln(3) = \ln(243)$

$2x \cdot \ln(3) + 1 \cdot \ln(3) = \ln(243) \quad | -1 \cdot \ln(3)$

$2x \cdot \ln(3) = \ln(243) - 1 \cdot \ln(3) \quad | :\ln(3)$

$2x = \frac{\ln(243) - \ln(3)}{\ln(3)} \quad | :2$

$x = \frac{\ln(243) - \ln(3)}{2 \cdot \ln(3)}$

$\underline{\underline{x = 2}} \Rightarrow \mathbb{L} = \{2\}$

b) $5^{2x+3} = 15.625 \quad | \ln$

$(2x+3) \cdot \ln(5) = \ln(15.625)$

$2 \cdot x \cdot \ln(5) + 3 \cdot \ln(5) = \ln(15.625) \quad | -3 \cdot \ln(5)$

$x \cdot 2 \cdot \ln(5) = \ln(15.625) - 3 \cdot \ln(5) \quad | : 2 \cdot \ln(5)$

$x = \frac{\ln(15.625) - 3 \cdot \ln(5)}{2 \cdot \ln(5)}$

$\underline{\underline{x = 1{,}5}} \Rightarrow \mathbb{L} = \{1{,}5\}$

(2)

a) $5 \cdot 1{,}8^{4x-3} = 29{,}16 \quad | :5$

$1{,}8^{4x-3} = \frac{729}{125} \quad | \ln$

$(4x-3) \cdot \ln(1{,}8) = \ln\left(\frac{729}{125}\right)$

$4x \cdot \ln(1{,}8) - 3 \cdot \ln(1{,}8) = \ln\left(\frac{729}{125}\right) \quad | +3 \cdot \ln(1{,}8)$

$x \cdot 4 \cdot \ln(1{,}8) = \ln\left(\frac{729}{125}\right) + 3 \cdot \ln(1{,}8) \quad | : 4 \cdot \ln(1{,}8)$

$x = \frac{\ln\left(\frac{729}{125}\right) + 3 \cdot \ln(1{,}8)}{4 \cdot \ln(1{,}8)}$

$\underline{\underline{x = \frac{3}{2} = 1{,}5}} \qquad \mathbb{L} = \{1{,}5\}$

Exponentialgleichungen mit Hilfe von Logarithmusgesetzen lösen

Satz IV.1 Logarithmengesetze
a und b seien positive reelle Zahlen.
r sei eine beliebige reelle Zahl.
Dann gelten folgende Gesetze:
(1) $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$
(2) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
(3) $\log(a^r) = r \cdot \log a$

Satz IV.2
Operation und Umkehroperation:
(4) $\log 10^x = x$
(5) $10^{\log x} = x$

Besondere Zehnerlogarithmen:
$\log 10 = 1, \log 1 = 0$

1. Berechnen Sie:

a) $3^{2x+1} = 243$ b) $5^{2x+3} = 15625$ c) $2^{4x+3} = 128$
d) $4^{3x-2} = 16384$ e) $6^{5x-2} = 1296$ f) $4 \cdot 3{,}2^{2x-3} = 131{,}072$

1

a) $3^{(2x+1)} = 243$

$(2x+1) \cdot \ln(3) = \ln(243)$

$2x \cdot \ln(3) + 1 \cdot \ln(3) = \ln(243) \quad | -\ln(3)$

$x \cdot 2 \cdot \ln(3) = \ln(243) - \ln(3) \quad | : 2 \cdot \ln(3)$

$x = \frac{\ln(243) - \ln(3)}{2 \cdot \ln(3)}$

$x = 2$ $\mathbb{L} = \{2\}$

b) $5^{2x+3} = 15.625 \quad | \ln$

$(2x+3) \cdot \ln(5) = \ln(15.625)$

$2 \cdot x \cdot \ln(5) + 3 \cdot \ln(5) = \ln(15.625) \quad | - 3 \cdot \ln(5)$

$x \cdot 2 \cdot \ln(5) = \ln(15.625) - 3 \cdot \ln(5) \quad | : 2 \cdot \ln(5)$

$x = \frac{\ln(15.625) - 3 \cdot \ln(5)}{2 \cdot \ln(5)}$

$x = 1{,}5 \Rightarrow \mathbb{L} = \{1{,}5\}$

②

2 Berechnen Sie:

a) $5\cdot 1{,}8^{4x-3}=29{,}16$ b) $8\cdot 7{,}5^{5x-8}=450$ c) $2{,}5\cdot 40^{-x}=342$

d) $3{,}8\cdot 5^{5-x}=475$ e) $2{,}4\cdot 50^{3-x}=0{,}048$ f) $5{,}6\cdot 20^{2-x}=0{,}0007$

a)
$$5\cdot 1{,}8^{4x-3}=29{,}16 \quad |:5$$
$$1{,}8^{4x-3}=\frac{729}{125} \quad |\ln$$
$$(4x-3)\cdot\ln(1{,}8)=\ln\left(\frac{729}{125}\right)$$
$$4x\cdot\ln(1{,}8)-3\cdot\ln(1{,}8)=\ln\left(\frac{729}{125}\right) \quad |+3\cdot\ln(1{,}8)$$
$$x\cdot 4\cdot\ln(1{,}8)=\ln\left(\frac{729}{125}\right)+3\cdot\ln(1{,}8) \quad |:4\cdot\ln(1{,}8)$$
$$x=\frac{\ln\left(\frac{729}{125}\right)+3\cdot\ln(1{,}8)}{4\cdot\ln(1{,}8)}$$
$$x=\frac{3}{2}=1{,}5 \qquad \mathbb{L}=\{1{,}5\}$$

b)
$$8\cdot 7{,}5^{5x-8}=450 \quad |:8$$
$$7{,}5^{5x-8}=56{,}25$$
$$(5x-8)\cdot\ln(7{,}5)=\ln(56{,}25)$$
$$5\cdot x\cdot\ln(7{,}5)-8\cdot\ln(7{,}5)=\ln(56{,}25) \quad |+8\cdot\ln(7{,}5)$$
$$5\cdot x\cdot\ln(7{,}5)=\ln(56{,}25)+8\cdot\ln(7{,}5) \quad |:5\ln(7{,}5)$$
$$x=\frac{\ln(56{,}25)+8\cdot\ln(7{,}5)}{5\cdot\ln(7{,}5)}$$
$$x=2$$

c)
$$2{,}5\cdot \boxed{40^{-x}}=342 \qquad \boxed{a^{-b}=\frac{1}{a^b}}$$
$$2{,}5\cdot\frac{1}{40^x}=342 \quad |\cdot 40^x$$
$$2{,}5\cdot 1=342\cdot 40^x \quad |\ln$$
$$\ln(2{,}5)=\ln(342\cdot 40^x)$$
$$\ln(2{,}5)=\ln(342)+\ln(40^x) \quad |-\ln(342)$$
$$\ln(2{,}5)-\ln(342)=\ln(40^x)$$
$$\ln(2{,}5)-\ln(342)=x\cdot\ln(40) \quad |:\ln(40)$$
$$\frac{\ln(2{,}5)-\ln(342)}{\ln(40)}=x$$
$$-1{,}333\approx x$$

3. Berechnen Sie:

a) $8 \cdot 9^{4-3x} = \frac{8}{9}$ b) $3^{2x-1} = 9^{2x-3}$ c) $2^{3x+1,6} = 4^{2x-0,1}$

d) $16^{2x+1} = 4^{2x+3}$ e) $3,5^{x-1} = 12,25^{x-2}$ f) $2 \cdot 4^{x+1} = 1,6 \cdot 20^{2x-1}$

3 a)

$$8 \cdot 9^{4-3x} = \frac{8}{9} \quad | :8$$
$$9^{(4-3x)} = \frac{1}{9} \quad | \ln$$
$$(4-3x) \cdot \ln(9) = \ln(\tfrac{1}{9}) \quad | \ln(9)$$
$$4-3x = \frac{\ln(\frac{1}{9})}{\ln(9)}$$
$$4-3x = -1 \quad | -4$$
$$-3x = -5 \quad | :(-3)$$
$$x = \frac{5}{3}$$
$$\mathbb{L} = \{\tfrac{5}{3}\}$$

b)

$$3^{2x-1} = 9^{2x-3} \quad | \ln$$
$$(2x-1) \cdot \ln(3) = (2x-3) \cdot \ln(9) \quad | :\ln(3)$$
$$(2x-1) = \frac{(2x-3) \cdot \ln(9)}{\ln(3)}$$
$$(2x-1) = (2x-3) \cdot \frac{\ln(9)}{\ln(3)}$$
$$(2x-1) = (2x-3) \cdot 2$$
$$2x-1 = 4x-6 \quad | -2x$$
$$-1 = 2x-6 \quad | +6$$
$$5 = 2x \quad | :2$$
$$2,5 = x$$
$$\mathbb{L} = \{2,5\}$$

c)

$$2^{3x+1,6} = 4^{2x-0,1}$$
$$(3x+1,6) \cdot \ln(2) = (2x-0,1) \cdot \ln(4) \quad | :\ln(2)$$
$$(3x+1,6) = (2x-0,1) \cdot \frac{\ln(4)}{\ln(2)}$$
$$3x+1,6 = (2x-0,1) \cdot 2$$
$$3x+1,6 = 4x-0,2 \quad | -3x$$
$$1,6 = x-0,2 \quad | +0,2$$
$$1,8 = x$$
$$\mathbb{L} = \{1,8\}$$

d)

$$16^{2x+1} = 4^{2x+3} \quad | \ln$$
$$(2x+1) \cdot \ln(16) = (2x+3) \cdot \ln(4) \quad | :\ln(4)$$
$$(2x+1) \cdot \frac{\ln(16)}{\ln(4)} = 2x+3$$
$$(2x+1) \cdot 2 = 2x+3$$
$$4x+2 = 2x+3 \quad | -2x$$
$$2x+2 = 3 \quad | -2$$
$$2x = 1 \quad | :2$$
$$x = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{L} = \{\tfrac{1}{2}\}$$

4. Berechnen Sie:

a) $(38416)^{\frac{1}{x}} = 14$

b) $(1764)^{\frac{1}{x}} = 42$

c) $(83521)^{\frac{1}{x-2}} = 17$

d) $(29791)^{\frac{1}{x-1}} = 31$

e) $(117649)^{\frac{1}{x-4}} = 49$

f) $(27)^{\frac{1}{2x+1}} = 3^x$

b) $1764^{\frac{1}{x}} = 42 \quad | \ln$

$\frac{1}{x} \cdot \ln(1764) = \ln(42) \quad | : \ln(1764)$

$\frac{1}{x} = \frac{\ln(42)}{\ln(1764)}$

$\frac{1}{x} = 0{,}5 \quad | \cdot x$

$1 = 0{,}5x \quad | : 0{,}5$

$\underline{\underline{2 = x}} \qquad \mathbb{L} = \{2\}$

d) $29.791^{\frac{1}{x-1}} = 31 \quad | \ln$

$\frac{1}{x-1} \cdot \ln(29.791) = \ln(31) \quad | \cdot (x-1)$

$1 \cdot \ln(29.791) = \ln(31) \cdot (x-1) \quad | : \ln(31)$

$\frac{\ln(29.791)}{\ln(31)} = x - 1$

$3 = x - 1 \quad | +1$

$\underline{\underline{4 = x}}$

$\mathbb{L} = \{4\}$

5. Berechnen Sie:

a) $(64)^{\frac{1}{x-1}} = 2^x$ b) $(243)^{\frac{1}{x+2}} = 3^{x-4}$ c) $(125)^{\frac{1}{x+1}} = 2{,}5 \cdot 2^{x-1}$

d) $(512)^{\frac{1}{2x-3}} = 2 \cdot 2^{x-1}$ e) $(343)^{\frac{1}{5x-7}} = (49)^{\frac{1}{3x-4}}$ f) $(578)^{\frac{1}{2x-1}} = 8{,}33$

a) $64^{\frac{1}{x-1}} = 2^x \quad | \ln$

$\frac{1}{x-1} \cdot \ln(64) = x \cdot \ln(2)$

$\frac{\ln(64)}{x-1} = x \cdot \ln(2) \quad | \cdot (x-1)$

$\ln(64) = x \cdot \ln(2) \cdot (x-1) \quad | \ln(2)$

$\frac{\ln(64)}{\ln(2)} = x \cdot (x-1)$

$6 = x^2 - x \quad | -6$

$0 = x^2 - x - 6$

$x_{1/2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 + 6}$

$x_1 = 3$

$x_2 = -2$

b) $243^{\frac{1}{x+2}} = 3^{x-4} \quad | \ln$

$\frac{1}{x+2} \cdot \ln(243) = (x-4) \cdot \ln(3) \quad | \cdot (x+2)$

$1 \cdot \ln(243) = (x-4) \cdot (x+2) \cdot \ln(3) \quad | : \ln(3)$

$\frac{\ln(243)}{\ln(3)} = (x-4) \cdot (x+2)$

$5 = x^2 + 2x - 4x - 8 \quad | -5$

$0 = x^2 - 2x - 13$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 13}$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{14}$

$\underline{x_1 \approx 4{,}74}$

$\underline{\underline{x_2 \approx -2{,}74}}$

d) $512^{\frac{1}{2x-3}} = 2 \cdot 2^{x-1} \quad | \ln$

$\frac{1}{2x-3} \cdot \ln(512) = \ln(2 \cdot 2^{x-1})$

$\frac{1}{2x-3} \cdot \ln(512) = \ln(2) + \ln(2^{x-1})$

$\frac{1}{2x-3} \cdot \ln(512) = \ln(2) + (x-1) \cdot \ln(2)$

$\frac{1}{2x-3} \cdot \ln(512) = \cancel{\ln(2)} + \ln(2) \cdot x - \cancel{\ln(2)}$

$\frac{1}{2x-3} \cdot \ln(512) = \ln(2) \cdot x \quad | \cdot (2x-3)$

$\ln(512) = \ln(2) \cdot x \cdot (2x-3)$

$\ln(512) = 2 \cdot \ln(2) \cdot x^2 - 3 \cdot \ln(2) \cdot x \quad | : \ln(2)$

$\frac{\ln(512)}{\ln(2)} = 2x^2 - 3x$

$9 = 2x^2 - 3x \quad | -9$

$0 = 2x^2 - 3x - 9 \quad | : 2$

$0 = x^2 - 1{,}5x - 4{,}5$

$x_{1/2} = 0{,}75 \pm \sqrt{0{,}75^2 + 4{,}5}$

$x_{1/2} = 0{,}75 \pm 2{,}25 \implies \underline{x_1 = 3}, \ \underline{\underline{x_2 = -1{,}5}}$

$\underline{\log(a \cdot b)}$

$= \underline{\log(a)} \ \underline{+ \log(b)}$

e) $343^{\frac{1}{5x-7}} = 49^{\frac{1}{3x-4}} \quad | \ln$

$$\frac{1}{5x-7} \cdot \ln(343) = \frac{1}{3x-4} \cdot \ln(49) \quad | : \ln(49)$$

$$\frac{1}{5x-7} \cdot \frac{\ln(343)}{\ln(49)} = \frac{1}{3x-4}$$

$$\frac{1}{5x-7} \cdot 1{,}5 = \frac{1}{3x-4}$$

$$\frac{1{,}5}{5x-7} = \frac{1}{3x-4}$$

$$1 \cdot (5x-7) = 1{,}5 \cdot (3x-4)$$

$$5x - 7 = 4{,}5x - 6 \quad | -4{,}5x$$

$$0{,}5x - 7 = -6 \quad | +7$$

$$0{,}5x = 1 \quad | : 0{,}5$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

7. Berechnen Sie

a) $4 \cdot 5^{2x-3} = 5 \cdot 10^{x-1}$

$$4 \cdot 5^{2x-3} = 5 \cdot 10^{x-1} \quad | : 4$$

$$5^{2x-3} = 1{,}25 \cdot 10^{x-1} \quad | \ln$$

$$\ln(5^{2x-3}) = \ln(1{,}25 \cdot 10^{x-1})$$

$$\ln(5^{2x-3}) = \ln(1{,}25) + \ln(10^{x-1})$$

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$(2x-3) \cdot \ln(5) = \ln(1{,}25) + (x-1) \cdot \ln(10)$$

$$2x \cdot \ln(5) - 3 \cdot \ln(5) = \ln(1{,}25) + x \cdot \ln(10) - \ln(10) \quad | -x \cdot \ln(10) \quad | +3 \cdot \ln(5)$$

$$2x \cdot \ln(5) - x \cdot \ln(10) = \ln(1{,}25) - \ln(10) + 3 \cdot \ln(5)$$

$$x \cdot [2 \cdot \ln(5) - \ln(10)] = \ln(1{,}25) - \ln(10) + 3 \cdot \ln(5) \quad | : [2 \cdot \ln(5) - \ln(10)]$$

$$x = \frac{\ln(1{,}25) - \ln(10) + 3 \cdot \ln(5)}{2 \cdot \ln(5) - \ln(10)}$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

Themen KA 3

- Seite 206 (incl. Tabellenoperationen ...)
- Anwendungsaufg. Exp.-Funkt.
- Logarithmusgesetze